HEC PARIS

ORAL HEC 2017

MATHÉMATIQUES

EXEMPLES DE SUJETS ET DE CORRIGES

Option littéraire B/L

SUJET BL 18

sujet BL 18

Exercice principal

1. Question de cours : formule de Taylor-Young.

Dans toute la suite de l'exercice , L désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad L(x) = x\,\mathrm{e}^{x}\ .$$

Pour tout nombre réel y, on dit que le nombre réel x est solution de l'équation de Lambert (l_y) si la valeur de L en x est égale à y :

$$L(x) = y \qquad (l_y)$$

2. a) Justifier que la fonction L est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et calculer ses dérivées successives.

b) Donner le tableau de variation de L sur $\mathbb{R}$ et en déduire pour quelles valeurs du nombre réel y l'équation de Lambert (l_y) admet une unique solution réelle.

c) Donner l'allure d'une représentation graphique de la fonction L.

3. a) On pose $I = [-\mathrm{e}^{-1}, +\infty\,[$ et $J = [-1, +\infty\,[$.
Justifier l'existence d'une unique application W de I dans J telle que pour tout $y \in I$, $W(y)$ soit solution de l'équation de Lambert (l_y).

b) Justifier la dérivabilité de la fonction W sur $]-\mathrm{e}^{-1}, +\infty\,[$ et, pour tout élément y de cet intervalle ouvert, l'égalité :

$$W'(y) = \frac{1}{\big(1 + W(y)\big)\,\mathrm{e}^{W(y)}}\ .$$

c) En utilisant l'égalité des accroissements finis, démontrer que :

$$\lim_{y \longrightarrow 0_+} \frac{W(y - \mathrm{e}^{-1}) - W(-\mathrm{e}^{-1})}{y} = +\infty\ \cdot$$

Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de W ?

4. a) Justifier l'existence de deux nombres réels a et b tels que l'on puisse écrire quand y tend vers 0 :

$$W(y) = a\,y + b\,y^2 + \circ(y^2)\ \cdot$$

b) Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $x \longmapsto ax\,\mathrm{e}^{x} + bx^2\mathrm{e}^{2x}$ et en déduire les valeurs de a et b.

5. a) Justifier, pour tout $y > 0$, l'égalité : $\ln\big(W(y)\big) + W(y) = \ln(y)$.

b) En déduire que $W(y)$ est équivalent à $\ln(y)$ quand y tend vers $+\infty$.

c) Justifier l'équivalence quand y tend vers $+\infty$:

$$W(y) - \ln(y) \sim -\ln\big(\ln(y)\big)\ \cdot$$

Exercice sans préparation

Soit n un entier strictement supérieur à 3. On considère n personnes qui jouent à "Pile" ou "Face" avec une pièce de monnaie équilibrée et de façon undépendante.

1. Soit A l'événement : "une seule personne exactement obtient un résultat différent des $(n-1)$ autres personnes".

Calculer la probabilité de A.

2. Un jeu consiste à réitérer l'expérience précédente (appelée "partie") jusqu'à la réalisation de A. On note X la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ désignant le nombre de parties jouées si le jeu s'arrête et prenant la valeur 0 sinon.

Donner la loi de X, son espérance et sa variance.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. Cours.

2. La fonction L

a) La fonction L est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de deux fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, la fonction polynomiale $x \longmapsto x$ et la fonction exponentielle.
Ses deux premières dérivées sont données, pour tout réel x par :
$L'(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^x$
$L''(x) = (x+2)\,\mathrm{e}^x$.

En procédant par récurrence ou en utilisant la formule de Leibniz, on obtient l'expression de la dérivée n-ième de L en tout point x :

$$\boxed{L^{(n)}(x) = (x+n)\,\mathrm{e}^x}\ .$$

b) La fonction L est strictement décroissante sur l'intervalle fermé $]-\infty,-1]$ et strictement croissante sur l'intervalle fermé $[-1,+\infty[$. Son minimum, atteint en -1, est égal à $-1/\mathrm{e}$. Elle tend vers 0 en $-\infty$ et vers $+\infty$ en $+\infty$.
Il en résulte que l'équation de Lambert (l_y) admet une unique solution réelle si et seulement si

$$\boxed{x \in \{-1/\mathrm{e}\} \ \cup\ [0,+\infty[}\ .$$

3. La fonction W

a) D'après l'étude faite en 1.b, la restriction de la fonction L à l'intervalle $J = [-1,+\infty[$ réalise une bijection de J sur l'intervalle $I = [-\mathrm{e}^{-1},+\infty[$.
La bijection réciproque W de cette bijection est l'unique application de I dans J telle que pour tout $y \in I$, $W(y)$ soit solution de l'équation de Lambert (l_y).

b) La dérivée de la fonction L ne s'annulant pas sur l'intervalle ouvert $]-1,+\infty[$, l'application W est dérivable en tout point de

$$L(]-1,+\infty[) \ =]-\mathrm{e}^{-1},+\infty[$$

et, pour tout élément y de cet intervalle ouvert, sa dérivée est donnée par la formule de dérivation d'une fonction réciproque :

$$\boxed{W'(y) = \frac{1}{L'\big(W(y)\big)} = \frac{1}{\big(1+W(y)\big)\,\mathrm{e}^{W(y)}}}\ .$$

c) Soit $y > 0$.

D'après l'égalité des accroissements finis, appliquée à la fonction W qui est continue sur le segment $[-\mathrm{e}^{-1}, y-\mathrm{e}^{-1}]$ et dérivable sur $]-\mathrm{e}^{-1}, y-\mathrm{e}^{-1}[$, il existe un élément $c(y)$ de $]-\mathrm{e}^{-1}, y-\mathrm{e}^{-1}[$ tel que :

$$\frac{W(y-\mathrm{e}^{-1})-W(-\mathrm{e}^{-1})}{y} = W'\big(c(y)\big) = \frac{1}{\Big(1+W\big(c(y)\big)\Big)\,\mathrm{e}^{W\left(c(y)\right)}}.$$

Quant y tend vers 0_+, $c(y)$ tend vers $-\mathrm{e}^{-1}$ par valeurs supérieures, $W\big(c(y)\big)$ vers -1_+ et finalement $\Big(1+W\big(c(y)\big)\Big)\,\mathrm{e}^{W\left(c(y)\right)}$ vers 0_+.

Par conséquent :

$$\boxed{\lim_{y\longrightarrow 0_+} \frac{W(y-\mathrm{e}^{-1})-W(-\mathrm{e}^{-1})}{y} = +\infty}.$$

Il en résulte que la courbe représentative de W a une **tangente verticale** au point $(-\mathrm{e}^{-1}, -1)$.[1]

4. a) D'après le théorème de la bijection, W est continue sur I, ce qui entraîne par la formule de 2.b exprimant la dérivée W' à l'aide de W, que la fonction W est de classe C^1 sur $]-\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$ et permet ensuite d'affirmer que W est de classe C^2 puisque sa dérivée est de classe C^1, par composition, à nouveau à partir de l'expression de W' en fonction de W.[2]

Comme W est de classe C^2 au voisinage de 0, elle admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 donné par la formule de Taylor-Young et, comme $W(0)=0$, il existe donc deux nombres réels $a = W'(0)$ et $b = \dfrac{W''(0)}{2}$ tels que :

$$\boxed{W(y) \underset{y\to 0}{=} a\,y + b\,y^2 + \mathrm{o}(y^2)}.$$

b) $\boxed{ax\mathrm{e}^x + bx^2\mathrm{e}^{2x} = ax + (a+b)x^2 + x^2\epsilon(x)}$, avec $\lim\limits_{x\to 0}\epsilon(x) = 0$.

Par substitution, puisque $x\mathrm{e}^x$ tend vers 0 quand x tend vers 0 :

$$W(x\mathrm{e}^x) = ax + (a+b)x^2 + x^2\epsilon(x) + \mathrm{o}(x^2\mathrm{e}^{2x})$$

ce qui entraîne que $W(x\mathrm{e}^x) - ax - (a+b)x^2$ est négligeable devant x^2 quand x tend vers 0. Par unicité d'un développement limité et comme $W(x\mathrm{e}^x) = W\big(L(x)\big) = x$, on en déduit :

$$\boxed{\begin{array}{c} a = 1 \\ b = -1 \end{array}}.$$

5. a) Soit $y > 0$. Par définition de W en tant que bijection réciproque, on a

$$L\big(W(y)\big) = W(y)\,\mathrm{e}^{W(y)} = y$$

d'où, en passant aux logarithmes, ce qui est possible parce que y et $W(y)$ sont strictement positifs :

$$\boxed{\ln\big(W(y)\big) + W(y) = \ln(y)}.$$

1. Ceci correspond, par symétrie par rapport à la première bissectrice, au fait que le graphe de L admet une tangente horizontale au point $(-1, -\mathrm{e}^{-1})$.

2. On démontrerait ainsi de proche en proche, par une récurrence immédiate, que W est en fait de classe C^∞ sur l'intervalle ouvert $]-\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$.

b) Quand y tend vers $+\infty$, $W(y)$ tend vers $+\infty$, ce qui entraîne que $\ln\big(W(y)\big)$ est négligeable devant $W(y)$, donc que $\ln\big(W(y)\big)+W(y)$ est équivalent à $W(y)$.
On en déduit à l'aide de l'égalité démontrée en a) que $W(y)$ est équivalent à $\ln(y)$ quand y tend vers $+\infty$.

c) Pour tout $y>1$, on pose : $h(y)=W(y)-\ln(y)$, ce qui permet d'écrire $W(y)$ sous la forme :

$$W(y)=\ln(y)-\ln\big(\ln(y)+h(y)\big)=\ln(y)-\ln\big(\ln(y)\big)-\ln\big(1+\frac{h(y)}{\ln(y)}\big)\ .$$

D'après l'équivalence précédente, $h(y)$ est négligeable devant $\ln(y)$ quand y tend vers l'infini, de sorte que

$$W(y)\underset{y\to+\infty}{=}\ln(y)-\ln\big(\ln(y)\big)+\circ(1)$$

et on en déduit l'équivalence quand y tend vers $+\infty$:

$$\boxed{W(y)-\ln(y)\sim-\ln\big(\ln(y)\big)}\ .$$

Corrigé de l'exercice sans préparation

1. Les n personnes jettent chacune une pièce. L'univers est $\Omega = \{P, F\}^n$ muni de l'équiprobabilité. Donc, chaque résultat a une probabilité égale à $\dfrac{1}{2^n}$.

Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on pose : $X_i = 1$ si la i-ème personne obtient "Pile" et $X_i = 0$ sinon.
Les variables X_i sont indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $1/2$, donc

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1/2) .$$

L'événement A est réalisé si à l'issue des n lancers, il y a 1 "Pile" et $(n-1)$ "Face", ou l'inverse. Donc,

$$A = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i = n-1\right) \bigcup \left(\sum_{i=1}^{n} X_i = 1\right)$$

et par incompatibilité,

$$P(A) = \binom{n}{1}\frac{1}{2^n} + \binom{n}{n-1}\frac{1}{2^n} = \frac{n}{2^{n-1}} .$$

2. La variable aléatoire suit la loi géométrique $\mathcal{G}\left(\dfrac{n}{2^{n-1}}\right)$.

Donc, $E(X) = \dfrac{2^{n-1}}{n}$ et $V(X) = 2^{n-1}\dfrac{2^{n-1} - n}{n^2}$.

SUJET BL 21

sujet BL 21

Exercice principal

1. Question : donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une série géométrique soit convergente.

   On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs ou nuls tels que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, et $\mathcal{S}_1$ le sous-ensemble de $\mathcal{S}$ des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}$ telles que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1$.

2. Montrer que pour toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}$, non identiquement nulle, il existe un unique réel $\lambda > 0$ et une suite $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}_1$ tels que $v = \lambda u$ (c'est-à-dire $v_n = \lambda u_n$, pour tout n).

3. a) On pose $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

   Montrer que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}_1$.

   b) Soit $a \in]0,1[$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a^n$.

   Montrer que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}$ et trouver le réel λ et la suite $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définis dans la question 2.

4. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs réelles, deux fois dérivable, telle que $f(0) = 0$, $f'(0) = k \in]0,1[$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) > 0$ et $f''(x) < 0$.

   On suppose que $u_0 > 0$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

   a) Montrer que $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}$.

   b) Soit $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}_1$ une suite définie à partir de $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme dans la question 2.

   On considère la variable aléatoire X_v définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X_v = n) = v_n$.

   Montrer que X_v admet une espérance et une variance.

Exercice sans préparation

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E tel que $f^2 = f$.
Montrer que $E = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$.

Corrigé de l'exercice principal

1. Cours.

2. Soit $U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. On pose $v_n = \frac{1}{U}\, u_n$, alors $v = \frac{1}{U}\, u$.

3.a) On a : $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$.

b) $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$, donc $v = (1-a)u$.

4.a) Soit $x > 0$. Alors f' est décroissante, donc $f'(x) \leq k$.
Si $y > 0$, il existe $x \in]0, y[$ tel que

$$\frac{f(y)}{y} = \frac{f(y) - f(0)}{y - 0} = f'(x) \leq k\ .$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{f(u_n)}{u_n} \leq k$, donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq k^n u_0$.
Par suite, la série de terme général u_n est convergente.

b) On a $v_n = \lambda\, u_n$ avec $\lambda > 0$. Soit $l \in]k, 1[$. On a $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\lambda u_{n+1}}{\lambda u_n} \leq k$, donc, il existe un entier N tel que pour $n \geq N$, $\frac{(n+1)\, v_{n+1}}{n\, v_n} < l$.
On en déduit que $n\, v_n \leq l^{n-N} N v_N$, terme général d'une série convergente.

Ceci montre l'existence de $E(X_v) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\, v_n$.

On montrerait de même l'existence de la série $\sum_{n \geq 0} n^2 v_n$ converge, c'est-à-dire l'existence de la variance de X_v.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E tel que $f^2 = f$.

Montrer que $E = \mathrm{Ker}f \oplus \mathrm{Im}f$.

Remarque : les projecteurs ne sont pas au programme B/L.

Si $x \in \mathrm{Ker}f \cap \mathrm{Im}f$, alors $f(x) = 0$ et $\exists y \in E$ tel que $x = f(y)$. Par suite, $x = f(y) \Longrightarrow f(x) = f^2(y) = f(y) = x = 0$ et $\mathrm{Ker}f \cap \mathrm{Im}f = \{0\}$.

Par analyse-synthèse, on a :

- Soit $z \in E$; on suppose qu'il existe $x \in \mathrm{Ker}f$ et $y \in \mathrm{Im}f$ tels que $z = x + y$. Puisque $y \in \mathrm{Im}f$, $\exists a \in E$ tel que $y = f(a)$. Par suite, $f(z) = f(x) + f(y) = f(y) = f^2(a) = f(a) = y$. Pour z donné, on choisit donc $y = f(z)$ et $x = z - y = z - f(z)$.
- Soit $z \in E$. On propose $x = z - f(z)$ et $y = f(z)$. On a bien : $y \in \mathrm{Im}f$ et $f(x) = f(z) - f^2(z) = f(z) - f(z) = 0$, donc $x \in \mathrm{Ker}f$. Enfin, on vérifie bien que $x + y = z - f(z) + f(z) = z \in E$.

Bilan : $E = \mathrm{Ker}f \oplus \mathrm{Im}f$.