HEC PARIS

ORAL HEC 2017

MATHÉMATIQUES

EXEMPLES DE SUJETS ET DE CORRIGES

Option technologique

SUJET T 05

EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours : formule de Koenig-Huygens.

2. Soit g la fonction réelle définie par : $\quad g(x) = \dfrac{x}{x^2 - 3}$.

   a) Donner l'ensemble de définition de g et préciser la parité de la fonction g.

   b) Calculer la fonction dérivée de g.

   c) Donner une représentation graphique de g, en indiquant ses asymptotes.

   d) Justifier l'égalité :

$$\int_2^3 g(x)\,\mathrm{d}x = \ln\sqrt{6}\ .$$

3. Pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 2, on note f_n la fonction définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{2nx}{(x^2-3)^{n+1}} & \text{si } x \geq 2 \\ 0 & \text{si } x < 2 \end{cases} .$$

   a) Démontrer que f_n est une densité de probabilité.

   b) Soit X_n une variable aléatoire de densité f_n.

   i) Démontrer que la variable aléatoire ${X_n}^2$ admet une espérance, donnée par la formule :

$$E({X_n}^2) = 3 + \frac{n}{n-1}\ .$$

   ii) Trouver la limite de $E(X_n)$ quand n tend vers l'infini.

Exercice sans préparation

1. Calculer les puissances successives de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.
2. On considère les instructions *Scilab* suivantes :

```
M=eye(2,2)/2;
N=M;
N(1,2)=1;
M=N;
c=1;
while N(1,1)>0.01
        N=M*N;
        c=c+1;
        end;
```

Quelles sont les valeurs des variables c et N(1,2) après l'exécution des instructions précédentes ?

Corrigé de l'exercice principal

1. Question de cours : formule de Koenig-Huygens.

$$V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 .$$

2. Soit g la fonction réelle définie par : $\quad g(x) = \dfrac{x}{x^2-3}$.

a) Donner l'ensemble de définition de g et préciser la parité de la fonction g.

La fonction g est impaire et définie sur $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}, +\sqrt{3}\}$.

b) Calculer la fonction dérivée de g.

$$\forall\, x \in D_g, \quad g'(x) = -\frac{(x^2+3)}{(x^2-3)^2} \,.$$

c) Donner une représentation graphique de g, en indiquant ses asymptotes.

• La fonction g est décroissante sur chacun des trois intervalles $]-\infty, -\sqrt{3}[$, $]-\sqrt{3}, +\sqrt{3}[$ et $]+\sqrt{3}, +\infty[$.

• Son graphe, symétrique par rapport à l'origine, admet l'axe des abscisses pour asymptote horizontale et les droites verticales d'équation $x = -\sqrt{3}$ et $x = +\sqrt{3}$ pour asymptotes verticales.

d) Justifier l'égalité :

$$\int_2^3 g(x)\,\mathrm{d}x = \ln\sqrt{6} \,.$$

$$\int_2^3 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_2^3 \frac{x}{x^2-3}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2-3)\right]_2^3 = \frac{1}{2}(\ln 6 - \ln 1) = \ln\sqrt{6} \,.$$

3. Pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 2, on note f_n la fonction définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{2nx}{(x^2-3)^{n+1}} & \text{si } x \geq 2 \\ 0 & \text{si } x < 2 \end{cases} .$$

a) Démontrer que f_n est une densité de probabilité.

• La fonction f_n est positive et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

• Son intégrale sur $\mathbb{R}$ est égale à 1 puisque :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_2^{+\infty} \frac{2nx}{(x^2-3)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\left[-\frac{1}{(x^2-3)^n}\right]_2^A = 1 \,.$$

b) Soit X_n une variable aléatoire de densité f_n.

i) Démontrer que la variable aléatoire ${X_n}^2$ admet une espérance, donnée par la formule :

$$E({X_n}^2) = 3 + \frac{n}{n-1} \,.$$

$$\begin{aligned} E({X_n}^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_2^{+\infty} \frac{2nx^3}{(x^2-3)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = \int_2^{+\infty} \frac{2nx\big(3+(x^2-3)\big)}{(x^2-3)^{n+1}}\,\mathrm{d}x \\ &= 3\int_2^{+\infty} \frac{2nx}{(x^2-3)^{n+1}}\,\mathrm{d}x + \frac{n}{n-1}\int_2^{+\infty} \frac{2(n-1)x}{(x^2-3)^{(n-1)+1}}\,\mathrm{d}x = 3 + \frac{n}{n-1} \,. \end{aligned}$$

ii) Trouver la limite de $E(X_n)$ quand n tend vers l'infini.

La nullité de f_n sur l'intervalle $]-\infty, 2[$ et la formule de Koenig-Huygens permettent d'obtenir l'encadrement

$$2 \leq E(X_n) \leq \sqrt{E({X_n}^2)} = \sqrt{3 + \frac{n}{n-1}}$$

qui fournit par passage à la limite :

$$\lim_{n\to+\infty} E(X_n) = 2 \,.$$

Corrigé de l'exercice sans préparation

1. Calculer les puissances successives de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & n\,a^{n-1}\,b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}.$$

2. On considère les instructions *Scilab* suivantes :

```
M=eye(2,2)/2;
N=M;
N(1,2)=1;
N=M;
c=1;
while N(1,1)>0.01
        N=M*N;
        c=c+1;
        end;
```

   Quelles sont les valeurs des variables c et N(1,2) après l'exécution des instructions précédentes ?

   - $c = 7$
   - $N(1,2) = \dfrac{7}{2^6} = \dfrac{7}{64} = 0.109375$

   puisque le plus petit entier n pour lequel $2^{-n} \leq 0.01$ est 7

   $$\begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}^6 = \begin{pmatrix} 0.015625 & 0.1875 \\ 0 & 0.015625 \end{pmatrix}$$

   et
   $$\begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}^7 = \begin{pmatrix} 0.0078125 & 0.109375 \\ 0 & .0078125 \end{pmatrix}$$

SUJET T 06

EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours : loi faible des grands nombres.

2. Pour tout nombre réel strictement positif a, on note f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_a(x) = \begin{cases} a\,x & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Pour quelle valeur de a, la fonction f_a est-elle une densité de probabilité ?

On note f cette densité et X une variable aléatoire admettant f pour densité.

3. a) Déterminer la fonction de répartition F de X.

b) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - F(x)\big)\,\mathrm{d}x$ et la calculer.

c) Vérifier l'égalité : $\displaystyle E(X) = \int_0^{+\infty} \big(1 - F(x)\big)\,\mathrm{d}x$.

4. On pose : $Y = \dfrac{X^2}{9}$.

a) Justifier que Y suit une loi uniforme.

b) Quelle est la loi que permet de simuler l'instruction *Scilab* suivante ?

```
3*sqrt(rand())
```

c) De quel nombre se rapproche la valeur fournie par l'instruction *Scilab* suivante lorsque n est grand ?

```
sum(sqrt(rand(n,1)))/n
```

Exercice sans préparation

Soit M la matrice définie par $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice identité. On pose : $J = M - I$.

1. Pour tout entier $p \geq 1$, calculer J^p en fonction de J.

2. Donner pour tout entier $n \geq 1$, une expression de M^n en fonction de I et J.

Corrigé de l'exercice principal

1. Question de cours : loi faible des grands nombres.

2. Pour tout nombre réel strictement positif a, on note f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f_a(x) = \begin{cases} a\,x & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$
Pour quelle valeur de a, la fonction f_a est-elle une densité de probabilité ?
$$\boxed{a = \frac{2}{9}} .$$
On note f cette densité et X une variable aléatoire admettant f pour densité.

3. a) Déterminer la fonction de répartition F de X.
$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x^2}{9} & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}} .$$
b) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(1 - F(x)\big)\,\mathrm{d}x$ et la calculer.
$$\int_0^{+\infty} \big(1 - F(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_0^3 \big(1 - \frac{x^2}{9}\big)\,\mathrm{d}x = \boxed{2} .$$
c) Vérifier l'égalité : $\displaystyle E(X) = \int_0^{+\infty} \big(1 - F(x)\big)\,\mathrm{d}x$.
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{9}\int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x = \boxed{2} .$$

4. On pose : $Y = \dfrac{X^2}{9}$.

   a) Justifier que Y suit une loi uniforme.

   La fonction de répartition G de Y est donnée par
$$G(x) = P([X^2 \leq 9x]) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ F(\sqrt{9x}) = x & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$
ce qui prouve que Y suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

   b) Quelle est la loi que permet de simuler l'instruction *Scilab* suivante ?

```
3*sqrt(rand())
```

Si une variable aléatoire U suit la loi uniforme sur $[0,1]$, $3 * \sqrt{U}$ suit la même loi que X, puisque $X = 3\sqrt{Y}$ et que Y et U suivent la même loi.
L'instruction *Scilab* précédente permet donc de simuler la loi de X.

c) De quel nombre se rapproche la valeur fournie par l'instruction *Scilab* suivante lorsque n est grand ?

```
sum(sqrt(rand(n,1)))/n
```

L'instruction *Scilab* "sqrt(rand(n,1))" génère une simulation d'un échantillon de taille n de la variable aléatoire $X/3$.
Grâce à la loi des grands nombres, on peut donc affirmer que, lorsque n est grand, l'instruction *Scilab* "sum(sqrt(rand(n,1)))/n" fournit une valeur approchée de

$$E(\frac{X}{3}) = \boxed{\frac{2}{3}}.$$

Corrigé de l'exercice sans préparation

Soit M la matrice définie par $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice identité. On pose : $J = M - I$.

1. Pour tout entier $p \geq 1$, calculer J^p en fonction de J.

$$J^p = 2^{p-1} J$$

2. Donner pour tout entier $n \geq 1$, une expression de M^n en fonction de I et J.

   Les matrices I et J commutent.
   La formule du binôme donne

$$M^n = (I + J)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I^k J^{n-k} = I + \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 2^{n-k-1} \right) J = I + 2^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \right) J$$

   Comme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{3}{2}\right)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k + \left(\frac{1}{2}\right)^n$, on obtient finalement

$$M^n = I + 2^{n-1} \left(\frac{3^n}{2^n} - \frac{1}{2^n} \right) J = \boxed{I + \frac{3^n - 1}{2} J}\,.$$