HEC
PARIS

ORAL HEC Paris 2018

MATHÉMATIQUES

EXEMPLES DE SUJETS ET DE CORRIGES

Option scientifique

EXERCICE PRINCIPAL

Dans tout l'exercice, X désigne une variable aléatoire à densité, possédant une espérance $E(X)$ et une variance $V(X)$. Les autres variables aléatoires introduites dans l'énoncé sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que X.

1. a) Question de cours : inégalité de Markov.

   b) Soit $a \in \mathbb{R}_+$.
   i) Pour tout réel strictement positif b, justifier l'inégalité :

$$P([X \geq E(X) + a]) \leq \frac{E\big((X - E(X) + b)^2\big)}{(a+b)^2} .$$

   ii) En appliquant le résultat précédent à $b = V(X)/a$, établir l'inégalité :

$$P([X \geq E(X) + a]) \leq \frac{V(X)}{V(X) + a^2} .$$

2. On appelle *médiane* de X tout nombre réel m tel que $P([X \leq m]) = \dfrac{1}{2}$.

   a) Justifier que X admet au moins une médiane et que l'ensemble des médianes de X est un segment de $\mathbb{R}$.

   b) Dans cette question, on note m une médiane de X et on suppose que m est supérieure ou égale à $E(X)$. On note $\sigma(X)$ l'écart-type de X.
   Déduire de l'inégalité prouvée en 1.b.ii, appliquée à $a = m - E(X)$, que $m - E(X)$ est inférieur ou égal à $\sigma(X)$.

   c) Justifier que toute médiane m de X vérifie l'inégalité : $\dfrac{|m - E(X)|}{\sigma(X)} \leq 1$.

3. Pour tout entier $n \geq 2$, on note X_n une variable aléatoire admettant pour densité la fonction f_n définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1/n \\ n/2 & \text{si } -1/n \leq x < 0 \\ 1/\big(2(n-1)\big) & \text{si } 0 \leq x < 1 - 1/n \\ (n-1)/2 & \text{si } 1 - 1/n \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} .$$

   a) Trouver l'unique médiane de X_n.

   b) Justifier la convergence en loi de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

   c) Quelle propriété du majorant trouvé en 2.c peut-on déduire des limites de $E(X_n)$ et $V(X_n)$ quand n tend vers l'infini ?

EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 2.
On dit qu'une matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *nilpotente* s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que M^k est la matrice nulle.

1. a) Donner un exemple de matrice nilpotente non nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   b) Démontrer que la seule matrice nilpotente et diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice nulle.

2. On appelle *indice de nilpotence* d'une matrice nilpotente M le plus petit entier strictement positif k tel que M^k est la matrice nulle.

   La fonction *Scilab* suivante, dont le code est incomplet, permet de calculer l'indice de nilpotence d'une matrice nilpotente.

```
function k=indnilp(A,n)// n=nombre de lignes et de colonnes de A
    k=1;
    B=A;
    while sum(abs(B))>0
            k=??;
            B=??;
    end;
endfunction
```

   a) Expliquer en détail la ligne de code « while sum(abs(B))>0 » .

   b) Compléter le code de la fonction « indnilp » .

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

Dans tout l'exercice, X désigne une variable aléatoire à densité, possédant une espérance $E(X)$ et une variance $V(X)$. Les autres variables aléatoires introduites dans l'énoncé sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que X.

1. a) Question de cours : inégalité de Markov.

Si X est une variable aléatoire positive admettant une espérance, alors pour tout réel c strictement positif : $\boxed{P([X \geqslant c]) \leqslant \frac{E(X)}{c}}$.

b) Soit $a \in \mathbb{R}_+$.

i) Pour tout réel strictement positif b, justifier l'inégalité :

$$\boxed{P([X \geq E(X) + a]) \leq \frac{E\big((X - E(X) + b)^2\big)}{(a+b)^2}}.$$

Soit $b > 0$.

$$P([X \geq E(X) + a]) = P([X - E(X) + b \geq a + b]) \leq P([(X - E(X) + b)^2 \geq (a+b)^2])$$

d'où, grâce à l'inégalité de Markov :

$$P([X \geq E(X) + a]) \leq \frac{E\big((X - E(X) + b)^2\big)}{(a+b)^2}.$$

ii) En appliquant le résultat précédent à $b = V(X)/a$, établir l'inégalité :

$$\boxed{P([X \geq E(X) + a]) \leq \frac{V(X)}{V(X) + a^2}}.$$

Pour $b = V(X)/a$, on obtient :

$$P([X \geq E(X) + a]) \leq \frac{E\big((X - E(X) + V(X)/a)^2\big)}{(a + V(X)/a)^2} = \frac{V(X) + \big(V(X)\big)^2/a^2}{a^2(1 + V(X)/a^2)^2} = \frac{V(X)}{V(X) + a^2}.$$

2. On appelle *médiane* de X tout nombre réel m tel que $P([X \leq m]) = \frac{1}{2}$.

a) Justifier que X admet au moins une médiane et que l'ensemble des médianes de X est un segment de $\mathbb{R}$.

La fonction de répartition $F : x \longmapsto P([X \leq x])$ étant continue sur $\mathbb{R}$ (puisque X est une variable aléatoire à densité), de limite 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que, pour tout réel y strictement compris entre 0 et 1, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$.

En particulier, il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $P([X \leq m]) = \frac{1}{2}$.

Soit I l'ensemble (non vide) des réels x tels que $F(x) = \frac{1}{2}$.

• I est un *intervalle*, parce que, quels que soient $(a,b) \in I^2$, tous les réels x compris entre a et b appartiennent à I (puisque la fonction croissante F prend la même valeur en a et en b).

• $I = \{x \in \mathbb{R} \mid F(x) = 1/2\}$ est une partie *fermée* de $\mathbb{R}$, puisque F est continue.

• I est une partie *bornée* de $\mathbb{R}$, puisque, par exemple, pour q_1 et q_3 choisis tels que $F(q_1) = 1/4$ et $F(q_3) = 3/4$, l'intervalle I est inclus dans $]q_1, q_3[$, donc borné.

Par conséquent, I est un *segment* (intervalle fermé borné) de $\mathbb{R}$.

b) Dans cette question, on note m une médiane de X et on suppose que m est supérieure ou égale à $E(X)$. On note $\sigma(X)$ l'écart-type de X.

Déduire de l'inégalité prouvée en 1.b.ii, appliquée à $a = m - E(X)$, que $m - E(X)$ est inférieur ou égal à $\sigma(X)$.

Par application de l'inégalité 1.b.ii, appliquée à $a = m - E(X)$, on obtient

$$\frac{1}{2} = P([X \geq m]) \leq \frac{V(X)}{V(X) + \big(m - E(X)\big)^2}$$

d'où $V(X) + \big(m - E(X)\big)^2 \leq 2\,V(X)$, puis : $\boxed{m - E(X) \leq \sigma(X)}$.

c) Justifier que toute médiane m de X vérifie l'inégalité : $\dfrac{|m - E(X)|}{\sigma(X)} \leq 1$.

D'après ce qui précède, l'inégalité demandée est vraie lorsque $m \geq E(X)$ ($\sigma(X)$ est strictement positif, puisque la variable aléatoire X possède une densité).

Dans le cas où $m \leq E(X)$, il suffit d'appliquer le résultat précédent à la variable aléatoire $-X$, dont $-m$ est une médiane, pour obtenir l'inégalité demandée.

3. Pour tout entier $n \geq 2$, on note X_n une variable aléatoire admettant pour densité la fonction f_n définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1/n \\ n/2 & \text{si } -1/n \leq x < 0 \\ 1/\big(2(n-1)\big) & \text{si } 0 \leq x < 1 - 1/n \\ (n-1)/2 & \text{si } 1 - 1/n \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} .$$

a) Trouver l'unique médiane de X_n.

La fonction de répartition F_n de X_n est donnée par :[1]

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1/n \\ (nx+1)/2 & \text{si } -1/n \leq x < 0 \\ 1/2 + x/\big(2(n-1)\big) & \text{si } 0 \leq x < 1 - 1/n \\ 1 + (n-1)(x-1)/2 & \text{si } 1 - 1/n \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} .$$

L'unique médiane m_n de X_n est 0.

b) Justifier la convergence en loi de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

1. Un dessin sera apprécié.

• Pour tout $x < 0$, $F_n(x)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, puisque, pour n assez grand, on a $x < -1/n$ (d'où $F_n(x) = 0$).

• Pour tout $x \in [0, 1[$, $F_n(x)$ tend vers $1/2$ quand n tend vers l'infini, puisque, pour n assez grand, on a $0 \leq x < -1/n$ (d'où $F_n(x) = 1/2 + x/\big(2(n-1)\big)$, qui tend vers $1/2$ quand n tend vers l'infini).

• Pour tout $x \geq 1$, $F_n(x) = 1$.

En résumé, quand n tend vers l'infini, $F_n(x) \longrightarrow G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc en loi vers une (toute) variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1/2)$.[2]

c) Quelle propriété du majorant trouvé en 2.c peut-on déduire des limites de $E(X_n)$ et $V(X_n)$ quand n tend vers l'infini ?

La limite en loi de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ permet de faire la conjecture que $E(X_n)$ et $V(X_n)$ tendent respectivement vers $1/2$ et $1/4$ quand n tend vers l'infini. Une fois établies ces convergences, on pourra affirmer

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{|m_n - E(X_n)|}{\sigma(X_n)} = 1}$$

ce qui prouvera que le majorant trouvé en 2.c est optimal.

Pour déterminer effectivement les limites des moments des X_n, une méthode efficace consiste à écrire la densité f_n comme la moyenne pondérée de trois densités de lois uniformes, dont l'espérance et la variance sont connues :

$$f_n = \frac{1}{2}\, g_n + \frac{1}{2n}\, h_n + \frac{(n-1)}{2n}\, k_n$$

où g_n, h_n et k_n sont des densités respectives des lois uniformes sur $[-1/n, 0]$, $[0, 1-1/n]$ et $[1-1/n, 1]$.

On déduit de cette décomposition les expressions de $E(X_n)$ et $E({X_n}^2)$, et leurs limites.

$$E(X_n) = \frac{1}{2}\,(\frac{-1}{2n}) + \frac{1}{2n}\,(\frac{n-1}{2n}) + \frac{(n-1)}{2n}\,(\frac{2n-1}{2n})$$

tend vers $1/2$ quand n tend vers l'infini.
De même, comme les espérances des carrés des trois lois uniformes de la décomposition tendent respectivement vers 0, $1/3$ et 1, leur moyenne pondérée par les coefficients $1/2$, $1/(2n)$ et $(n-1)/(2n)$, qui est égale à $E({X_n}^2)$, tend vers $1/2$ quand n tend vers l'infini. On a donc bien :

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma(X_n) = \sqrt{\frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{2}\,.$$

Finalement, la borne supérieure des quotients $\dfrac{|m - E(X)|}{\sigma(X)}$ pour les variables aléatoires X à densité possédant un moment d'ordre deux est bien égale à 1. Il n'existe pas de majorant strictement plus petit de tous ces quotients.

2. L'étude de la convergence de la suite $\big(F_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour $x = 0$ et $x = 1$ était en fait inutile puisque 0 et 1 sont les points de discontinuité de la fonction de répartition de la loi $\mathcal{B}(1/2)$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

1. a) Donner un exemple de matrice nilpotente non nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Démontrer que la seule matrice nilpotente et diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice nulle.

Soit A une matrice nilpotente et diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Comme A est nilpotente, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que X^k est un polynôme annulateur de A. Dès lors, la seule valeur propre possible de A est 0.
Comme A est diagonalisable, elle est semblable à la matrice nulle, donc nulle.

2. On appelle *indice de nilpotence* d'une matrice nilpotente M le plus petit entier strictement positif k tel que M^k est la matrice nulle.
La fonction *Scilab* suivante, dont le code est incomplet, permet de calculer l'indice de nilpotence d'une matrice nilpotente.

```
function k=indnilp(A,n)// n=nombre de lignes et de colonnes de A
    k=1;
    B=A;
    while sum(abs(B))>0
            k=??;
            B=??;
    end;
endfunction
```

a) Expliquer en détail la ligne de code « while sum(abs(B))>0 » .

« abs(B) » est une matrice dont chaque coefficient est égal à la valeur absolue du coefficient correspondant de la matrice B.
La condition d'arrêt de la boucle « while » est donc que B soit la matrice nulle.

b) Compléter le code de la fonction « indnilp » .

```
function k=indnilp(A,n)// n=nombre de lignes et de colonnes de A
    k=1;
    B=A;
    while sum(abs(B))<>0
            k=k+1;
            B=A*B;
    end;
endfunction
```

L'incrémentation du compteur k cessera dès que la matrice $B = A^k$ est nulle, et la valeur finale de k, en sortie de boucle, sera égale à l'indice de nilpotence de A.

Exercice principal

1. Question de cours.
Formule de Taylor avec reste intégral et cas particulier d'une fonction polynomiale.

Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 2.
On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, ainsi qu'une famille $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ d'événements attachés à cet espace.
On note I l'ensemble des indices $i \in [\![1, n]\!]$ pour lesquels l'événement A_i est réalisé et on désigne par N le nombre, aléatoire, d'éléments de I.
Pour chaque $p \in [\![1, n]\!]$ on pose :

$$s_p = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leqslant n} P\big(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cdots \cap A_{i_p}\big)$$

et l'on convient de poser $s_0 = 1$.
Pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, on note $\mathbf{1}_{A_i}$ la variable indicatrice de l'événement A_i, c'est-à-dire l'application définie sur Ω par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathbf{1}_{A_i}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

2. Exprimer N à l'aide des variables indicatrices $\mathbf{1}_{A_i}$ et en déduire que N est une variable aléatoire réelle sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

3. Soit p un nombre entier compris entre 1 et n.

   a) Justifier l'égalité :
   $$\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leqslant n} \mathbf{1}_{A_{i_1}} \mathbf{1}_{A_{i_2}} \ldots \mathbf{1}_{A_{i_p}} = \frac{N(N-1)\cdots(N-p+1)}{p!} .$$

   b) En déduire que : $\quad s_p = \dfrac{E\big(N(N-1)\cdots(N-p+1)\big)}{p!}$.

4. En utilisant une formule de Taylor, justifier l'égalité :
$$\sum_{k=0}^{n} P([N=k])X^k = \sum_{p=0}^{n} s_p \; (X-1)^p .$$

5. Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

   a) Trouver une expression de $P([N=k])$ en fonction de $s_k, \ldots, s_n$.

   b) Démontrer l'égalité :
   $$P([N \geqslant k]) = \sum_{p=k}^{n} (-1)^{p-k} \binom{p-1}{k-1} s_p.$$

   c) Quelle expression en déduit-on pour la probabilité de la réunion des événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$?

Exercice sans préparation

On considère les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Comparer leurs spectres, leurs traces, leurs rangs, ainsi que les dimensions de leurs sous-espaces propres.
2. Sont-elles semblables ?

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours.

Formule de Taylor avec reste intégral et cas particulier d'une fonction polynomiale.

Si une fonction f est de classe C^{n+1} sur un intervalle I, alors, pour tout couple (a, x) de points distincts de I, on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Pour un polynôme P de degré inférieur ou égal à n, le reste intégral disparaît et on obtient l'égalité :

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k\ .$$

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, ainsi qu'une famille $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ d'événements attachés à cet espace.
On note I l'ensemble des indices $i \in [\![1, n]\!]$ pour lesquels l'événement A_i est réalisé et on désigne par N le nombre, aléatoire, d'éléments de I.
Pour chaque $p \in [\![1, n]\!]$ on pose :

$$\boxed{s_p = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leqslant n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cdots \cap A_{i_p})}$$

et l'on convient de poser $s_0 = 1$.
Pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, on note $\mathbf{1}_{A_i}$ la variable indicatrice de l'événement A_i, c'est-à-dire l'application définie sur Ω par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad \mathbf{1}_{A_i}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}\ .$$

2.

Exprimer N à l'aide des variables indicatrices $\mathbf{1}_{A_i}$ et en déduire que N est une variable aléatoire réelle sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

$$\boxed{N = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i}}\ .$$

Comme les A_i sont des éléments de la tribu $\mathcal{A}$, les $\mathbf{1}_{A_i}$ sont des variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et il en est de même de leur somme.

3. Soit p un nombre entier compris entre 1 et n.

a) Justifier l'égalité :

$$\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant n} \mathbf{1}_{A_{i_1}}\mathbf{1}_{A_{i_2}}\ldots\mathbf{1}_{A_{i_p}} = \frac{N(N-1)\cdots(N-p+1)}{p!} .$$

Soit $\omega \in \Omega$.
Comme $\mathbf{1}_{A_{i_1}}(\omega)\ldots\mathbf{1}_{A_{i_p}}(\omega)$ est égal à 1 si, et seulement si, ω appartient à chacun des événements $A_{i_1},\ldots,A_{i_p}$, c'est-à-dire si, et seulement si, $\{i_1,i_2,\ldots,i_p\}$ est une partie à p éléments de l'ensemble $I(\omega)$, la somme

$$\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant n} \mathbf{1}_{A_{i_1}}(\omega)\ldots\mathbf{1}_{A_{i_p}}(\omega)$$

est donc égale au nombre de parties à p éléments de l'ensemble $I(\omega)$, c'est-à-dire à :

$$\binom{N(\omega)}{p} = \frac{N(\omega)\big(N(\omega)-1\big)\cdots\big(N(\omega)-p+1\big)}{p!} .$$

Par conséquent :

$$\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant n} \mathbf{1}_{A_{i_1}}\mathbf{1}_{A_{i_2}}\ldots\mathbf{1}_{A_{i_p}} = \frac{N(N-1)\cdots(N-p+1)}{p!} .$$

b) En déduire que : $\quad s_p = \dfrac{E\big(N(N-1)\cdots(N-p+1)\big)}{p!}$.

Comme $E(\mathbf{1}_{A_{i_1}}\mathbf{1}_{A_{i_2}}\ldots\mathbf{1}_{A_{i_p}}) = P\big(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cdots\cap A_{i_p}\big)$, on obtient, par linéarité de l'espérance :

$$\frac{E\big(N(N-1)\cdots(N-p+1)\big)}{p!} = \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant n} P\big(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cdots\cap A_{i_p}\big) = s_p .$$

4. En utilisant une formule de Taylor, justifier l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{n} P([N=k])X^k = \sum_{p=0}^{n} s_p\ (X-1)^p .$$

La formule de Taylor (voir question de cours), appliquée au polynôme $G = \sum_{k=0}^{n} P([N=k])X^k$ (au point 1 et à l'ordre n), s'écrit :

$$G = \sum_{p=0}^{n} \frac{G^{(p)}(1)}{p!}\,(X-1)^p .$$

Comme $G_N^{(0)}(1) = G_N(1) = 1 = s_0$ et comme, pour tout $p \in [\![1,n]\!]$,

$$G_N^{(p)}(1) = \sum_{k=0}^{n} P([N=k])\ k(k-1)\cdots(k-p+1)\ 1^{k-p} = E\big(N(N-1)\cdots(N-p+1)\big) ,$$

l'égalité demandée en résulte directement.

5. Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

a) $\boxed{\text{Trouver une expression de } P([N = k]) \text{ en fonction de } s_k, \ldots, s_n.}$

Du résultat précédent, on déduit par la formule du binôme et par interversion des symboles de sommation, les égalités

$$G_N = \sum_{p=0}^{n} \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} s_p \; X^k = \sum_{k=0}^{n} \Big(\sum_{p=k}^{n} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} s_p \Big) X^k$$

puis par identification du coefficient de X^k dans le polynôme G

$$\boxed{P([N = k]) = \sum_{p=k}^{n} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} s_p} \, .$$

b) $\boxed{\text{Démontrer l'égalité :} \quad P([N \geqslant k]) = \sum_{p=k}^{n} (-1)^{p-k} \binom{p-1}{k-1} s_p.}$

$$P([N \geqslant k]) = \sum_{p=k}^{n} P([N = p]) = \sum_{p=k}^{n} \Big(\sum_{i=k}^{p} (-1)^{p-i} \binom{p}{i} \Big) s_p$$

d'où la formule demandée, par télescopage, grâce aux égalités pascaliennes

$$(-1)^{p-i} \binom{p}{i} = (-1)^{p-i} \binom{p-1}{i} - (-1)^{p-(i-1)} \binom{p-1}{i-1} \, .$$

c) $\boxed{\text{Quelle expression en déduit-on pour la probabilité de la réunion des événements } A_1, A_2, \ldots, A_n \,?}$

$$P(A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n) = P(N \geqslant 1) = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p-1} s_p \, .$$

Il s'agit de la formule du crible, au programme pour $n = 2$ et $n = 3$.

Corrigé de l'exercice sans préparation

On considère les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Comparer leurs spectres, leurs traces, leurs rangs, ainsi que les dimensions de leurs sous-espaces propres.

   $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(B) = \{0\}$
   $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B) = 0$
   $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(B) = 2$
   $\dim(\mathrm{E}_0)(A) = \dim(\mathrm{E}_0)(B) = 4 - 2 = 2$

2. Sont-elles semblables ?

   Non, puisque $A^2 \neq 0$ et $B^2 = 0$.

EXERCICE PRINCIPAL

Dans tout l'exercice, n et N désignent des nombres entiers supérieurs ou égaux à 2.

1. Question de cours.
Donner la définition d'une forme linéaire. Quel lien existe-t-il entre formes linéaires et hyperplans ?

2. On note H_n l'ensemble des matrices de trace nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   a) Justifier que H_n est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.
   b) Trouver un supplémentaire de H_n.

3. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension N et f une forme linéaire sur E.
   a) Justifier que, pour toute forme linéaire g sur E, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
   $$(1) \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ f = \lambda\, g \qquad\qquad (2) \quad \operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker} f \quad .$$
   b) Démontrer par récurrence sur p que, si $g_1, \ldots, g_p$ sont des formes linéaires sur E telles que $\bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker} g_i \subset \operatorname{Ker} f$, alors : $f \in \operatorname{Vect}\{g_1, \ldots, g_p\}$.
   c) On suppose ici : $n < N$.
   En utilisant le théorème de la base incomplète, justifier que, si $g_1, g_2, \ldots, g_n$ sont des formes linéaires sur E linéairement indépendantes, alors :
   $$\dim\Big(\bigcap_{j=1}^{n} \operatorname{Ker} g_j\Big) = N - n \ .$$

EXERCICE SANS PRÉPARATION

On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, on a
$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) \mathrm{e}^{-x^2/2} \leqslant \sqrt{2\pi}\big(1 - \Phi(x)\big) \leqslant \left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{e}^{-x^2/2} .$$

2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

   Trouver la limite de la probabilité conditionnelle $P_{[X \geq x]}\big([\, X \geq x + \frac{1}{x}\,]\big)$ quand x tend vers $+\infty$.

Corrigé de l'exercice principal

Dans tout l'exercice, n et N désignent des nombres entiers supérieurs ou égaux à 2.

1. Question de cours.
Donner la définition d'une forme linéaire. Quel lien existe-t-il entre les formes linéaires et les hyperplans ?

- On appelle forme linéaire sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.
- Les hyperplans de E sont les noyaux des formes linéaires non (identiquement) nulles sur E.

Remarque
Dans le programme des classes préparatoires commerciales, les hyperplans ne sont définis que pour les espaces vectoriels de dimension finie.

2. On note H_n l'ensemble des matrices de trace nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Justifier que H_n est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.

La trace étant une forme linéaire non (identiquement) nulle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, son noyau H_n est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\dim(H_n) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) - 1 = \boxed{n^2 - 1}\ .$$

b) Trouver un supplémentaire de H_n.

L'ensemble $\mathrm{Vect}\{I_n\}$ des matrices scalaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un supplémentaire de H_n :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = H_n \oplus \mathrm{Vect}\{I_n\}$$

puisque $H_n \cap \mathrm{Vect}\{I_n\} = \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\}$ et que toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se décompose comme la somme d'une matrice de H_n et d'une matrice scalaire :

$$M = \big(M - \mathrm{Tr}(M)I_n\big) + \mathrm{Tr}(M)I_n\ .$$

Remarque
Les supplémentaires de H_n sont les droites vectorielles engendrées par une matrice de trace non nulle.

3. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension N et f une forme linéaire sur E.

a) Justifier que, pour toute forme linéaire g sur E, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
(1) $\exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ f = \lambda\, g$ (2) $\mathrm{Ker}\, g \subset \mathrm{Ker}\, f$

- L'implication (1) $\Longrightarrow$ (2) est immédiate puisque si $f = \lambda\, g$ et $x \in \mathrm{Ker}\, g$, alors :

$$f(x) = \lambda g(x) = 0\ .$$

• Pour démontrer l'implication (2) $\Longrightarrow$ (1), on suppose l'inclusion $\operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker} f$.

1) Si f est (identiquement) nulle, on a $f = \lambda\, g$ pour $\lambda = 0$.

2) Sinon, il existe un vecteur x_0 tel que $g(x_0) \neq 0$, puisque $\operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker} f \neq E$.

Comme $\operatorname{Ker} g$ est un hyperplan de E et $x_0 \notin \operatorname{Ker} g$, la droite $\operatorname{Vect}\{x_0\}$ est un supplémentaire de cet hyperplan :

$$E = \operatorname{Ker} g \oplus \operatorname{Vect}\{x_0\} \ .$$

Soit x un vecteur de E et $y + \alpha_x\, x_0$ son unique décomposition comme la somme d'un élément y de $\operatorname{Ker} g$ et d'un élément de la droite $\operatorname{Vect}\{x_0\}$.

Comme $f(x) = f(y) + \alpha_x\, f(x_0) = \alpha_x\, f(x_0)$ et $g(x) = g(y) + \alpha_x\, g(x_0) = \alpha_x\, g(x_0)$ (puisque $f(y) = g(y) = 0$), on a :

$$f(x) = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}\, g(x) \ .$$

Par conséquent, $f = \lambda\, g$ pour $\lambda = \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$.

b) | Démontrer par récurrence sur p que, si $g_1, \ldots, g_p$ sont des formes linéaires sur E telles que $\bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker} g_i \subset \operatorname{Ker} f$, alors : $f \in \operatorname{Vect}\{g_1, \ldots, g_p\}$.

La propriété est vraie pour $p = 1$, quels que soient l'espace vectoriel E de dimension finie et la forme linéaire f sur E, d'après le résultat de la question précédente, les cas où la dimension de E serait égale à 0 ou à 1 étant immédiats.

On suppose que, sur tout espace vectoriel de dimension finie, la propriété est vraie pour un entier $p \in \mathbb{N}^*$ (hypothèse de récurrence) et on considère $p + 1$ formes linéaires $g_1, \ldots, g_{p+1}$ telles que $\bigcap_{i=1}^{p+1} \operatorname{Ker} g_i \subset \operatorname{Ker} f$.

On note $v_1, \ldots, v_p$ et u les restrictions de $g_1, \ldots, g_p$ et f à $\operatorname{Ker} g_{p+1}$.

$$\bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker} v_i = \bigcap_{i=1}^{p} \left(\operatorname{Ker} g_i \cap \operatorname{Ker} g_{p+1}\right) \subset \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g_{p+1} = \operatorname{Ker} u \ .$$

Par application de l'hypothèse de récurrence à des formes linéaires sur $\operatorname{Ker} g_{p+1}$, il existe p nombres réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que :

$$u = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i \ .$$

Il en résulte que le noyau de la forme linéaire $f - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i$ contient $\operatorname{Ker} g_{p+1}$, et d'après le résultat de la question précédente, qu'il existe un réel λ tel que :

$$f - \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i = \lambda\, g_{p+1} \ .$$

Par conséquent : $f = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i + \lambda\, g_{p+1} \in \operatorname{Vect}\{g_1, \ldots, g_{p+1}\}$, ce qui clôt la récurrence.

c) On suppose ici : $n < N$.

En utilisant le théorème de la base incomplète, justifier que, si $g_1, g_2, \ldots, g_n$ sont des formes linéaires sur E linéairement indépendantes, alors :

$$\dim\Big(\bigcap_{j=1}^{n} \operatorname{Ker} g_j\Big) = N - n \, .$$

Comme la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ des formes linéaires sur E est égale à N, le théorème de la base incomplète permet d'affirmer qu'il existe $N-n$ formes linéaires $g_{n+1}, \ldots, g_N$ sur E pour lesquelles $g_1, g_2, \ldots, g_N$ est une base de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.
D'après la propriété démontrée en b, toutes les inclusions

$$\bigcap_{j=1}^{N} \operatorname{Ker} g_j \subset \bigcap_{j=1}^{N-1} \operatorname{Ker} g_j \subset \cdots \subset \bigcap_{j=1}^{2} \operatorname{Ker} g_j \subset \operatorname{Ker} g_1 \subset E$$

sont strictes, à cause de l'indépendance linéaire de $g_1, g_2, \ldots, g_N$, qui entraîne qu'aucune de ces formes linéaires ne peut être combinaison linéaire des précédentes.
Il en résulte que la suite, strictement croissante, des dimensions de ces $N + 1$ sous-espaces vectoriels de E reliés par inclusion ne peut être que la progression arithmétique $0, 1, 2, \ldots, N$.
Par conséquent :

$$\boxed{\dim\Big(\bigcap_{j=1}^{n} \operatorname{Ker} g_j\Big) = N - n} \, .$$

CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, on a
$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) \mathrm{e}^{-x^2/2} \leqslant \sqrt{2\pi}\big(1 - \Phi(x)\big) \leqslant \left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{e}^{-x^2/2}.$$

On considère les deux fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par
$$\forall x > 0, \qquad \begin{cases} u(x) = \sqrt{2\pi}\big(1 - \Phi(x)\big) - \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3}\right) \mathrm{e}^{-x^2/2} \\ \\ v(x) = \left(\dfrac{1}{x}\right) \mathrm{e}^{-x^2/2} - \sqrt{2\pi}\big(1 - \Phi(x)\big) \end{cases}.$$

Elles sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et on trouve :
$$\forall x > 0, \qquad \begin{cases} u'(x) = -\dfrac{3}{x^4} \mathrm{e}^{-x^2/2} < 0 \\ \\ v'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \mathrm{e}^{-x^2/2} < 0 \end{cases}.$$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} v(x) = 0$, on en déduit les deux fonctions u et v sont (strictement) positives sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui démontre l'encadrement demandé (avec en prime des inégalités strictes).

2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

Trouver la limite de la probabilité conditionnelle $P_{[X \geq x]}\big([\, X \geq x + \frac{1}{x}\,]\big)$ quand x tend vers $+\infty$.

$$P_{[X \geq x]}\big([\, X \geq x + \frac{1}{x}\,]\big) = \frac{1 - \Phi\big(x + \frac{1}{x}\big)}{1 - \Phi(x)}$$

qui, d'après ce qui précède, est compris entre $m(x) = \dfrac{\left(\dfrac{1}{(x + 1/x)} - \dfrac{1}{(x + 1/x)^3}\right) e^{-(x+1/x)^2/2}}{\left(\dfrac{1}{x}\right) \mathrm{e}^{-x^2/2}}$

et $M(x) = \dfrac{\left(\dfrac{1}{x + 1/x}\right) e^{-(x+1/x)^2/2}}{\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3}\right) \mathrm{e}^{-x^2/2}}$.

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} m(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} M(x) = \mathrm{e}^{-1}$, on obtient par encadrement :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} P_{[X \geq x]}\big([\, X \geq x + \frac{1}{x}\,]\big) = \mathrm{e}^{-1}}.$$

EXERCICE PRINCIPAL

Dans tout l'exercice, n désigne un nombre entier supérieur ou égal à 2.
On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, et T l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui associe à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sa transposée ${}^tM$.

Pour tout espace vectoriel E, on note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

Le but de l'exercice est l'étude de l'ensemble :

$$\mathcal{C} = \Big\{ f \in \mathcal{L}\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big);\ \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad f\big(T(M)\big) = T\big(f(M)\big) \Big\}\ .$$

1. a) Question de cours.
Donner la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$ lorsque E est un espace de dimension finie et en déduire la dimension de $\mathcal{L}\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)$.
b) Pourquoi la trace $\mathrm{Tr}(M)$ de la matrice M de T dans une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne dépend-elle pas de cette base ? Quelle est cette trace ?

2. Trouver une application linéaire dont $\mathcal{C}$ est le noyau et en déduire que $\mathcal{C}$ est un espace vectoriel.

3. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R});\ {}^tS = S\}$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R});\ {}^tA = -A\}$.
a) Établir que : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
b) En déduire qu'un endomorphisme f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ appartient à $\mathcal{C}$ si, et seulement si, les deux sous-espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont stables par f.

4. a) Déterminer les dimensions respectives de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
b) En déduire l'égalité :
$$\dim(\mathcal{C}) = \frac{n^2(n^2+1)}{2}\ .$$

5. a) Démontrer que l'endomorphisme T est diagonalisable.
b) Justifier qu'il existe des éléments f de $\mathcal{C}$ qui ne sont pas diagonalisables et en donner un exemple.

EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit m_1 et m_2 deux réels tels que $m_1 < m_2$ et $\sigma > 0$.

Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ (*resp.* $(Y_k)_{k\geq 1}$) une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant la loi $\mathcal{N}(m_1, \sigma^2)$ (*resp.* $\mathcal{N}(m_2, \sigma^2)$)
Pour tout entier n non nul on pose :

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \quad \text{et} \quad \overline{Y_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k.$$

1. À partir d'une étude graphique et sans démonstration, trouver un réel a tel que :

$$P([X_1 \geq a]) = P([Y_1 \leq a]) \ .$$

2. Démontrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un réel a et un entier n, tels que :

$$P(\overline{X_n} \geq a) = P(\overline{Y_n} \leq a) \quad \text{et} \quad P(\overline{X_n} \geq a) < \epsilon \ .$$

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

Dans tout l'exercice n désigne un nombre entier supérieur ou égal à 2.
On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, et T l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui associe à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sa transposée ${}^tM$.

Pour tout espace vectoriel E, on note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

Le but de l'exercice est l'étude de l'ensemble :

$$\mathcal{C} = \left\{ f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}));\ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad f(T(A)) = T(f(A)) \right\} .$$

1. a) Question de cours.

Donner la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$ lorsque E est un espace de dimension finie et en déduire la dimension de $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

$$\dim(\mathcal{L}(E)) = (\dim(E))^2 \quad \text{et} \quad \dim\Big(\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))\Big) = n^4 .$$

b) Pourquoi la trace $\mathrm{Tr}(M)$ de la matrice M de T dans une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne dépend-elle pas de cette base ? Quelle est cette trace ?

Deux matrices semblables ayant la même trace, toutes les matrices représentatives d'un même endomorphisme ont la même trace.
En particulier, la trace de toutes les matrices représentatives de T est la trace de sa matrice dans la base $(E_{1,1}, E_{1,2}, \dots, E_{n,n})$ des matrices élémentaires, c'est-à-dire $\boxed{n}$, puisque sur la diagonale de cette matrice $n^2 - n$ coefficients sont nuls et n égaux à 1.

2. Trouver une application linéaire dont $\mathcal{C}$ est le noyau et en déduire que $\mathcal{C}$ est un espace vectoriel.

Pour tout $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, on note :

$$\varphi(f) = T \circ f - f \circ T .$$

Sa linéarité étant flagrante, φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, dont le noyau est $\mathcal{C}$, qui est par conséquent un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

3. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R});\ {}^tM = M\}$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R});\ {}^tM = -M\}$.

a) Établir que : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

On raisonne classiquement par analyse-synthèse.
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Supposons qu'il existe deux matrices $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = A + S$.
On a alors ${}^tM = {}^tS + {}^tA = S - A$.

Il en résulte que nécessairement on a : $S = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$ et $A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$.
Réciproquement si $S = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$ et $A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$ alors ${}^tS = S$ et ${}^tA = -A$ et $M = S + A$ d'où le résultat voulu.

b) En déduire qu'un endomorphisme f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ appartient à $\mathcal{C}$ si, et seulement si, les deux sous-espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont stables par f.

- Condition suffisante

Soit f un endomorphisme laissant stables les deux sous-espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $S = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$ et $A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$.

$$f\big(T(M)\big) = f(S - A) = f(S) - f(A) = {}^tf(S) + {}^tf(A)$$

(puisque $f(S)$ appartient à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $f(A)$ à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$), donc :

$$f\big(T(M)\big) = T\big(f(S) + f(A)\big) = T\big(f(M)\big)$$

Par conséquent f appartient à $\mathcal{C}$.

- Condition nécessaire

Soit $f \in \mathcal{C}$.
Si S appartient à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors ${}^t\big(f(S)\big) = T\big(f(S)\big) = f\big(T(S)\big) = f(S)$ et donc :

$$f(S) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})\ .$$

Si A appartient à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, alors ${}^t\big(f(A)\big) = T\big(f(A)\big) = f\big(T(A)\big) = f(-A) = -f(A)$ et donc :

$$f(A) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})\ .$$

Par conséquent, les deux sous-espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont stables par f.

4. a) Déterminer les dimensions respectives de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Ces dimensions sont connues de la plupart des candidat(e)s, mais on en demandera une justification, plus ou moins détaillée, comme celle qui suit ou n'importe quelle variante.

Toute matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ vérifie :

$$A = \sum_{1 \le i < j \le n} a_{i,j}\,(E_{i,j} - E_{j,i})$$

ce qui prouve que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ possède une famille génératrice de cardinal $\frac{n(n-1)}{2}$.
Sa dimension est donc au plus égale à $\frac{n(n-1)}{2}$.
De même, toute matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifie :

$$A = \sum_{1 \le i \le n} a_{i,i}\,E_{i,i} + \sum_{1 \le i < j \le n} a_{i,j}\,(E_{i,j} + E_{j,i})$$

ce qui prouve que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ possède une famille génératrice de cardinal $\dfrac{n(n+1)}{2}$.
Sa dimension est donc au plus égale à $\dfrac{n(n+1)}{2}$.
Il en résulte que :

$$\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) + \dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) \geq \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2 .$$

Comme $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) + \dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})) \leq \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = n^2$, on en déduit que :

$$\boxed{\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2} .}$$

b) En déduire l'égalité : $\dim(\mathcal{C}) = \dfrac{n^2(n^2+1)}{2}$.

L'application linéaire

$$\begin{array}{rccl} \Psi : & \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) \times \mathcal{L}(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) \\ & f & \longmapsto & (f_1, f_2) \end{array}$$

où f_1 (resp. f_2) désigne la restriction de f à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$) est bijective parce que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires.
Les deux espaces vectoriels $\mathcal{C}$ et $\mathcal{L}(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) \times \mathcal{L}(\mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$ sont donc isomorphes, et leurs dimensions sont égales.

Il en résulte que la dimension de $\mathcal{C}$ est égale à

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n^2+1)}{2} .$$

5. a) Démontrer que l'endomorphisme T est diagonalisable.

Comme toutes les matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont des vecteurs propres de T (associés à la valeur propre 1) et celles de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des vecteurs propres de T (associés à la valeur propre -1), l'endomorphisme T est diagonalisable puisque la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est au moins égale (donc égale) à $n^2 = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

b) Justifier qu'il existe des éléments f de $\mathcal{C}$ qui ne sont pas diagonalisables et en donner un exemple.

Comme la dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est strictement supérieure à 1 (puisque $n \geq 2$), il existe des endomorphimes g de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ qui ne sont pas diagonalisables, à partir desquels on obtient des endomorphismes f de $\mathcal{C}$ qui ne sont pas diagonalisables en posant, par exemple :

$$f(M) = g\left(\frac{1}{2}({}^tM + M)\right) .$$

Plus spécifiquement l'endomorphisme f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui associe à la matrice élémentaire $E_{1,1}$ la matrice $E_{2,2}$ et à toutes les autres matrices élémentaires $E_{i,j}$ la matrice nulle appartient à $\mathcal{C}$ et n'est pas diagonalisable (il est nilpotent d'ordre 2).

CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit m_1 et m_2 deux réels tels que $m_1 < m_2$ et $\sigma > 0$.

Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ (*resp.* $(Y_k)_{k\geq 1}$) une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur un même espace probabilisé et suivant la loi $\mathcal{N}(m_1, \sigma^2)$ (*resp.* $\mathcal{N}(m_2, \sigma^2)$)
Pour tout entier n non nul on pose :

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \quad \text{et} \quad \overline{Y_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k.$$

1. À partir d'une étude graphique et sans démonstration, trouver un réel a tel que :

$$P([X_1 \geq a]) = P([Y_1 \leq a]) .$$

Par propriétés de stabilité des lois normales, on a :

$$\overline{X_n} \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1, \frac{\sigma^2}{n}) \quad \text{et} \quad \overline{Y_n} \hookrightarrow \mathcal{N}(m_2, \frac{\sigma^2}{n})$$

Il en résulte que la courbe représentative de $f_{\overline{Y_n}}$ (densité de $\overline{Y_n}$) s'obtient par translation vers la droite de $m_2 - m_1$ à partir de la courbe représentative de $f_{\overline{X_n}}$.
Par symétrie des courbes il s'en suit que le réel a recherché est le milieu du segment $[m_1, m_2]$ soit $\boxed{a = \frac{m_1 + m_2}{2}}$.

2. Démontrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un réel a et un entier n, tels que :

$$P(\overline{X_n} \geq a) = P(\overline{Y_n} \leq a) \quad \text{et} \quad P(\overline{X_n} \geq a) < \epsilon .$$

Remarque.
Une fois constaté que le même a que précédemment convient, l'existence d'un tel entier n se devine graphiquement en observant que lorsque n augmente la courbe représentative de la densité de $\overline{X_n}$ devient de plus en plus "pointue" et sa queue de distribution de plus en plus fine...

Soit Φ la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. On a :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad 1 - \Phi(t) = \Phi(-t)$$

De plus :

$$\sqrt{n}\frac{\overline{X_n} - m_1}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1) \quad \text{et} \quad \sqrt{n}\frac{\overline{Y_n} - m_2}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

Il en résulte que :

$$P(\overline{X_n} \geq a) = P(\sqrt{n}\,\frac{\overline{X_n} - m_1}{\sigma} \geq \sqrt{n}\,\frac{a - m_1}{\sigma}) = 1 - \Phi(\sqrt{n}\,\frac{a - m_1}{\sigma}) = \Phi(-\sqrt{n}\,\frac{\overline{a} - m_1}{\sigma})$$

et

$$P(\overline{Y_n} \leq a) = P(\sqrt{n}\,\frac{\overline{Y_n} - m_2}{\sigma} \leq \sqrt{n}\,\frac{a - m_2}{\sigma}) = \Phi(\sqrt{n}\,\frac{a - m_2}{\sigma})$$

On obtient :

$$P(\overline{X_n} \geq a) = P(\overline{Y_n} \leq a) \iff \Phi(-\sqrt{n}\,\frac{a - m_1}{\sigma}) = \Phi(\sqrt{n}\,\frac{a - m_2}{\sigma})$$

et la fonction Φ réalisant une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0, 1[$:

$$-\sqrt{n}\,\frac{a - m_1}{\sigma} = \sqrt{n}\,\frac{a - m_2}{\sigma}$$

d'où :

$$-(a - m_1) = a - m_2$$

Bilan :

$$\boxed{a = \frac{m_1 + m_2}{2}}$$

Par ailleurs, $a > m_1$ et donc d'après la loi faible des grands nombres on a : $\lim_{n \to +\infty} P(\overline{X_n} \geq a) = 0$.
L'existence d'un entier n vérifiant $P(\overline{X_n} \geq a) < \epsilon$ en résulte.

EXERCICE PRINCIPAL

Toutes les variables aléatoires introduites dans cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Question de cours.

   Définition et propriétés des lois γ .

   Dans toute la suite de l'exercice, λ désigne un nombre réel strictement positif.

2. Soit U une variable aléatoire à valeurs dans $]0, +\infty[$ et suivant la loi exponentielle de paramètre 1. On pose : $X = U^{-1/\lambda}$.

   a) Vérifier que la fonction de répartition de la variable aléatoire X est donnée par :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} e^{-(x^{-\lambda})} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

   b) En déduire que X est une variable aléatoire à densité.

   c) Proposer un script *Scilab* de simulation de la loi de X.

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

   a) Démontrer que X possède un moment d'ordre k si, et seulement si, k est strictement inférieur à λ, et que :

   $$\forall k < \lambda, \quad E(X^k) = \Gamma\Big(1 - \frac{k}{\lambda}\Big)$$

   b) En déduire que, pour tout réel $a > \dfrac{1}{2}$, on a l'inégalité stricte :

   $$\big(\Gamma(a)\big)^2 < \Gamma(2a-1) .$$

4. Soit Y une variable aléatoire positive, dont la fonction de répartition F_Y vérifie :

   $$1 - F_Y(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x^{-\lambda} .$$

   On considère une suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la loi de Y.

   Enfin et pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

   $$Z_n = n^{-1/\lambda} \operatorname{Sup}(Y_1, \ldots, Y_n).$$

   Exprimer la fonction de répartition de Z_n à l'aide de celle de Y et en déduire que la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la variable X de la question 2.

Exercice sans préparation

On considère la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$:

$$M = \begin{pmatrix} e^{2i\pi/3} & e^{4i\pi/3} & 1 \\ e^{4i\pi/3} & 1 & e^{2i\pi/3} \\ 1 & e^{2i\pi/3} & e^{4i\pi/3} \end{pmatrix} .$$

1. Calculer la trace et le rang de M.
2. La matrice M est-elle diagonalisable ?
3. Justifier que M est semblable à la matrice $M' = \begin{pmatrix} e^{4i\pi/3} & e^{2i\pi/3} & 1 \\ e^{2i\pi/3} & 1 & e^{4i\pi/3} \\ 1 & e^{4i\pi/3} & e^{2i\pi/3} \end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice principal

1. Question de cours.

Définition et propriétés des lois γ .

Outre une densité de la loi $\gamma(\nu)$, on attendait son espérance et sa variance, ainsi que la propriété de convolution des lois γ.

Dans toute la suite de l'exercice, λ désigne un nombre réel strictement positif.

2. Soit U une variable aléatoire à valeurs dans $]0,+\infty[$ et suivant la loi exponentielle de paramètre 1.
On pose : $\boxed{X = U^{-1/\lambda}}$.

a) Vérifier que la fonction de répartition de la variable aléatoire X est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-(x^{-\lambda})} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Comme $X(\Omega)$ est inclus dans $]0,+\infty[$, $F_X(x)$ est nul pour $x \leq 0$.
Pour tout $x > 0$:

$$F_X(x) = P([U^{-1/\lambda} \leq x]) = P([U \geq x^{-\lambda}]) = \mathrm{e}^{-(x^{-\lambda})} .$$

b) En déduire que X est une variable aléatoire à densité.

La variable aléatoire X admet une densité puisque F_X est continue sur $\mathbb{R}$ (la continuité à droite en 0 doit être établie) et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0 (mais en fait de classe C^1 sur $\mathbb{R}$).

c) Proposer un script *Scilab* de simulation de la loi de X.

```
lambda=input('lambda=?')
u=grand(1,1,'exp',1);
x=u^(-1/lambda)
```

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

a) Démontrer que X possède un moment d'ordre k si, et seulement si, k est strictement inférieur à λ, et que :

$$\forall k < \lambda, \quad E(X^k) = \Gamma\Big(1 - \frac{k}{\lambda}\Big)$$

Par la formule de transfert, on a, sous réserve de convergence,

$$E(X^k) = \int_0^{+\infty} u^{-k/\lambda}\, \mathrm{e}^{-u}\, \mathrm{d}u = \Gamma\Big(1 - \frac{k}{\lambda}\Big) .$$

Il en résulte que X possède un moment d'ordre k si, et seulement si, $1 - \dfrac{k}{\lambda} > 0$ et que ce moment est alors donné par la formule demandée.

b) En déduire que, pour tout réel $a > \dfrac{1}{2}$, on a l'inégalité stricte :

$$\left(\Gamma(a)\right)^2 < \Gamma(2a-1)\ .$$

Lorsque $\lambda > 2$, la formule de Koenig-Huygens fournit la variance de X :

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \Gamma\left(1 - \frac{2}{\lambda}\right) - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\ .$$

Cette variance est strictement positive, puisque X est une variable à densité, et par conséquent

$$\Gamma^2\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) < \Gamma\left(1 - \frac{2}{\lambda}\right)$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\left(\Gamma(a)\right)^2 < \Gamma(2a-1)}$$

en posant $a = 1 - \dfrac{1}{\lambda}$ (qui est strictement supérieur à $1/2$ si, et seulement si $\lambda > 2$).

4. Soit Y une variable aléatoire positive, dont la fonction de répartition F_Y vérifie :

$$\boxed{1 - F_Y(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^{-\lambda}}\ .$$

On considère une suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la loi de Y.

Enfin et pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$\boxed{Z_n = n^{-1/\lambda}\,\mathrm{Sup}(Y_1, \ldots, Y_n)}.$$

Exprimer la fonction de répartition de Z_n à l'aide de celle de Y et en déduire que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la variable X de la question 2.

On trouve classiquement :

$$F_{Z_n}(x) = P[\mathrm{Sup}(Y_1, \ldots, Y_n) \le n^{1/\lambda}x] = \left(F_Y(n^{1/\lambda}x)\right)^n.$$

Pour $x > 0$, l'équivalence $\ln u \sim u - 1$ quand u tend vers 1 entraîne alors que, lorsque n tend vers l'infini, on a :

$$\ln F_Y(n^{1/\lambda}x) \sim F_Y(n^{1/\lambda}x) - 1 \sim -\frac{x^{-\lambda}}{n}$$

Dès lors, $\ln F_{Z_n}(x)$ tend vers $-x^{-\lambda}$, ce qui entraîne que :

$$\lim_{n\to+\infty} F_{Z_n}(x) = F_X(x).$$

Comme de plus $F_{Z_n}(x) = F_X(x) = 0$ pour tout $x \le 0$, on en déduit que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X.

Corrigé de l'exercice sans préparation

On considère la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$: $M = \begin{pmatrix} e^{2i\pi/3} & e^{4i\pi/3} & 1 \\ e^{4i\pi/3} & 1 & e^{2i\pi/3} \\ 1 & e^{2i\pi/3} & e^{4i\pi/3} \end{pmatrix}$.

1. Calculer la trace et le rang de M.

   - La trace de M est nulle puisque :

$$1 + e^{2i\pi/3} + e^{4i\pi/3} = 0 \ .$$

   - Le rang de M est égal à 1 parce que les colonnes (ou les lignes) de M sont colinéaires.

2. La matrice M est-elle diagonalisable ?

   Comme le rang de M est égal à 1, 0 est une valeur propre de M et la dimension du sous-espace propre associé égale à 2.
   La trace de M étant nulle, 0 est la seule valeur propre de M. [1]
   Il en résulte que M n'est pas diagonalisable.

3. Justifier que M est semblable à la matrice $M' = \begin{pmatrix} e^{4i\pi/3} & e^{2i\pi/3} & 1 \\ e^{2i\pi/3} & 1 & e^{4i\pi/3} \\ 1 & e^{4i\pi/3} & e^{2i\pi/3} \end{pmatrix}$.

   Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{C}^3$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3) = (e_3, e_2, e_1)$.

   Alors :

   - $f(e'1) = f(e_3) = e_1 + e^{2i\pi/3}e_2 + e^{4i\pi/3}e_3 = e^{4i\pi/3}e'1 + e^{2i\pi/3}e'_2 + e'3$
   - $f(e'2) = f(e_2) = e^{4i\pi/3}e_1 + e_2 + e^{2i\pi/3}e_3 = e^{2i\pi/3}e'1 + e'_2 + e^{4i\pi/3}e'3$
   - $f(e'3) = f(e_1) = e^{2i\pi/3}e_1 + e^{4i\pi/3}e_2 + e_3 = e'_1 + e^{4i\pi/3}e'1 + e'_2 + e^{2i\pi/3}e'3$

   et par conséquent : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = M'$.

   Représentant le même endomorphisme dans les deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, les deux matrices M et M' sont semblables.

1. Dans une base obtenue en complétant une base du noyau de $\mathbb{C}^3$ de l'endomorphisme f canoniquement associé à M, la matrice de f est triangulaire et de trace nulle.

EXERCICE PRINCIPAL

1. a) Question de cours : égalité et inégalités des accroissements finis.
   b) Justifier, pour tout $x \leq 0$, l'inégalité : $|e^x - 1| \leq |x|$.

2. Justifier la convergence absolue de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,dt$.

On note f la fonction définie par : $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^x(t)\,dt$.

3. a) Déterminer le domaine de définition D_f de f et justifier que f est monotone.
   b) Justifier, pour tout $x \in D_f$, l'égalité :

$$f(x) = \frac{x+2}{x+1}\, f(x+2) .$$

4. a) Établir, pour tout $(x, y) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$, l'inégalité :

$$|f(x) - f(y)| \;\leq\; |x - y| \int_0^{\pi/2} |\ln(\sin t)|\,dt .$$

   b) Démontrer que f est continue.
   c) Trouver la limite et un équivalent simple de $f(x)$ quand $x \to -1_+$.

5. a) Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité :

$$f(n) \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \frac{\pi}{2} \cos^n\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) .$$

   b) En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers l'infini.

EXERCICE SANS PRÉPARATION

On considère la fonction *Scilab* suivante :

```
function f=bn(N,n,p)
X=grand(N,n,'geom',p);
k=0;
for i=1: N
    Y=sum(X(i,:))
    if Y>=n/p then k=k+1;
        end
end
f=k/N
endfunction
```

1. De quel nombre réel bn($N, 1, 0.4$) fournit-il une valeur approchée lorsque N est grand ?

2. Donner une valeur approximative de bn($10000, 10000, 0.4$).

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. a) Question de cours : égalité et inégalités des accroissements finis.

- Si f est continue sur un segment $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \ .$$

- Si f est dérivable sur un intervalle I et si sa dérivée vérifie l'encadrement $m \leq f' \leq M$, alors :

$$\forall (a, b) \in I^2, \quad a \leq b \ \Rightarrow m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a) \ .$$

- Si f est dérivable sur un intervalle I et si sa dérivée vérifie l'inégalité $|f'| \leq k$, alors :

$$\forall (a, b) \in I^2, \quad |f(b) - f(a)| \leq k\,|b - a| \ .$$

b) Justifier, pour tout $x \leq 0$, l'inégalité : $|e^x - 1| \leq |x|$.

Il suffit d'appliquer la deuxième inégalité des accroissements finis (QC) à la fonction exp sur l'intervalle $I = \mathbb{R}_-$, dont la valeur absolue de la dérivée est majorée par $k = 1$.

2. Justifier la convergence absolue de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\, dt$.

La fonction $t \mapsto \ln(\sin t)$ est continue et négative sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et

$$\ln(\sin t) = \ln(t + o(t)) = \ln(t) + \ln(1 + o(1)) = \ln(t) + o(1) \underset{0}{\sim} \ln(t)$$

Or $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(t)\, dt$ converge donc par comparaison $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) dt$ est convergente.

On note f la fonction définie par : $\boxed{f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^x(t)\, dt}$.

3. a) Déterminer le domaine de définition D_f de f et justifier que f est monotone.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

La fonction $\varphi : \left\{ \begin{array}{lcl} \left]0, \frac{\pi}{2}\right] & \to & \mathbb{R}^+ \\ t & \mapsto & \sin^x(t) = e^{x \ln(\sin t)} \end{array} \right.$ est continue sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Comme $\varphi(t) \underset{t \to 0}{\sim} t^x$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^x(t)\, dt$ converge si, et seulement si, $x > -1$.

Par conséquent, f est définie sur $\boxed{D_f =]-1, +\infty[}$.

Si $-1 < x \leq y$, alors, pour tout $t \in]0, \pi/2]$, $\sin^x(t) \geq \sin^y(t)$ et par conséquent :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^x(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_0^{\pi/2} \sin^y(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

La fonction f est donc décroissante.

b) Justifier, pour tout $x \in D_f$, l'égalité : $\quad f(x) = \dfrac{x+2}{x+1} f(x+2)$.

$$\begin{aligned}
f(x+2) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\sin^x(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos^2(t)\right)\sin^x(t)\,\mathrm{d}t \\
&= f(x) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin^x(t)^{\uparrow} \cos t_{\downarrow}\,\mathrm{d}t \\
&= f(x) - \left[\frac{\sin^{x+1}(t)}{x+1}\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{x+1}(t)}{x+1}\,(-\sin t)\,\mathrm{d}t \\
&= f(x) - \frac{1}{x+1} f(x+2)
\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{f(x) = \frac{x+2}{x+1} f(x+2)}\,.$$

4. a) Établir, pour tout $(x,y) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$, l'inégalité :

$$|f(x) - f(y)| \ \leq\ |x-y| \int_0^{\pi/2} |\ln(\sin t)|\,\mathrm{d}t\ .$$

Soit $(x,y) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$.

Pour tout $t \in]0, \pi/2]$, on a :

$$|\sin^x(t) - \sin^y(t)| \ =\ |\sin^{\min\{x,y\}}(t)|\,|\sin^{|x-y|}(t) - 1| \ \leq |\mathrm{e}^{|x-y|\,\ln(\sin t)} - 1| \leq |x-y|\,|\ln(\sin t)|$$

d'après 1b, puisque $\ln(\sin t) < 0$.

Il en résulte, par intégration entre 0 et $\pi/2$ (possible grâce au résultat de la question 2) que :

$$\boxed{|f(x) - f(y)| \ \leq\ |x-y| \int_0^{\pi/2} |\ln(\sin t)|\,\mathrm{d}t}\,.$$

b) Démontrer que f est continue.

La majoration précédente entraîne la continuité de f sur $\mathbb{R}_+^*$ et la formule démontrée en 3.b de l'étendre à D_f.

c) $\boxed{\text{Trouver la limite et un équivalent simple de } f(x) \text{ quand } x \to -1_+ .}$

Par continuité de f au point 1, on trouve

$$\lim_{x\to -1} f(x+2) = f(1) = \int_0^{\pi/2} \sin(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

d'où $\lim_{x\to -1} f(x) = +\infty$ et

$$\boxed{f(x) \underset{-1_+}{\sim} \frac{1}{x+1}} .$$

5. a) Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité :

$$f(n) \le \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \frac{\pi}{2} \cos^n\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) .$$

Par la relation de Chasles

$$f(n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t \le \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} \sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t$$

d'où

$$f(n) \le \frac{\pi}{2}\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \frac{\pi}{2}\cos^n\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)} .$$

b) $\boxed{\text{En déduire la limite de } f(x) \text{ quand } x \text{ tend vers l'infini.}}$

$$\cos^n\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) = \left(1 - \frac{1}{2n^{2/3}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{2/3}}\right)\right)^n$$

tend vers 0 quand n tend vers l'infini, puisque son logarithme néperien, équivalent à $-\dfrac{n^{1/3}}{2}$, tend vers $-\infty$.

Il en résulte que la suite de terme général $f(n)$ converge vers 0, et, comme f est décroissante, que :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0} .$$

Corrigé de l'exercice sans préparation

On considère la fonction *Scilab* suivante :

```
function f=bn(N,n,p)
X=grand(N,n,'geom',p); // simulation de N fois n var iid G(p)
k=0;
for i=1: N
    Y=sum(X(i,:)) //simulation de la somme de n var iid G(p)
    if Y>=n/p then k=k+1;
        end
end
f=k/N // fr\'{e}quence des simulations au moins \'{e}gales \`{a} n/p
endfunction
```

1. $\boxed{\text{De quel nombre réel bn}(N, 1, 0.4) \text{ fournit-il une valeur approchée lorsque } N \text{ est grand ?}}$

   Pour chaque valeur de i, Y est une simulation d'une variable de Bernoulli dont le paramètre est égal à :

   $$P([\mathcal{G}(0.4) \geq \frac{1}{0.4}]) = P([\mathcal{G}(0.4) \geq 3]) = \sum_{k=3}^{+\infty} 0.4 \times (1-0,4)^{k-1} = 0.6^2 = 0.36$$

   Par la loi des grands nombres, $bn(N, 1, 0.4)$ sera donc proche de 0.36 pour les grandes valeurs de N.

2. $\boxed{\text{Donner une valeur approximative de bn}(10000, 10000, 0.4).}$

   La loi de la somme de $n = 10000$ variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{G}(p = 0.4)$ coïncide presque exactement avec la loi normale de même espérance ($n/p = 25000$) et de même variance $n(1-p)/p^2 = 37500$, dont la probabilité qu'elle excède son espérance est égale à $1/2$.
   Une valeur approximative de $\text{bn}(10000, 10000, 0.4)$ est donc 0.5.

EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours.

   Énoncer le théorème de transfert pour les variables aléatoires discrètes.

2. a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, justifier la convergence de l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos t)^n}{t^2}\,dt$ et montrer qu'elle est strictement positive.

   b) Pour $s \in \mathbb{R}$, justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\,dt$ et exprimer sa valeur en fonction de I_1 et de $|s|$.

3. a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer à l'aide du changement de variable $t = \sqrt{\dfrac{2u}{n}}$, la convergence de l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\left(\cos\sqrt{\frac{2u}{n}}\,\right)^n}{u\sqrt{u}}\,du$ et déterminer une relation entre J_n et I_n.

   b) Établir, pour tout $(n,u) \in \mathbb{N}^* \times]0,1]$, l'inégalité :
$$\left|1-\left(\cos\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)^n\right| \leq u\ .$$

   c) Démontrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

Dans la suite de l'exercice, on considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\{-1,1\}$, qui sont mutuellement indépendantes et telles que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2}\cdot$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

4. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E\big(\cos(t\,S_n)\big) = (\cos t)^n$.

   b) En utilisant les formules trouvées en 2.b et 3.a, exprimer $E(|S_n|)$ en fonction de I_n et de I_1.

5. En déduire l'existence d'un réel positif M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(|S_n|) \leq M\sqrt{n}$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille $n \times n$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $\varphi_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto AM$.

1. Démontrer que A et φ_A ont le même spectre.
2. Comparer, pour chacune de leurs valeurs propres communes, les dimensions des sous-espaces propres correspondants de A et φ_A.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours.

Énoncer le théorème de transfert pour les variables aléatoires discrètes.

Soit X est une variable aléatoire réelle discrète définie sur Ω et f est une application définie sur $X(\Omega)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Alors $f(X)$ est une variable aléatoire réelle discrète et si $X(\Omega)$ est infini, $f(X)$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{x\in X(\Omega)} f(x)P(X=x)$ est absolument convergente.
Dans le cas où $f(X)$ admet une espérance, on a l'égalité :

$$E(f(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)P(X=x) .$$

2. a)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, justifier la convergence de l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos t)^n}{t^2}dt$ et montrer que $I_n > 0$.

• L'application $f_n : t \mapsto \dfrac{1-(\cos t)^n}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

• Au voisinage de 0, $(\cos t)^n = \left(1 - \dfrac{t^2}{2} + o(t^2)\right)^n = 1 - n\dfrac{t^2}{2} + o(t^2)$ donc $f_n(t) = \frac{n}{2} + o(1)$; l'application f_n est donc prolongeable par continuité en 0 ce qui assure la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

• La convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ résulte par exemple du fait que pour tout $t \geq 1$,

$$0 \leq f_n(t) \leq \frac{2}{t^2} .$$

Comme la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, et différente de la fonction nulle, son intégrale donc $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ est strictement positive.

b)

Pour $s \in \mathbb{R}$, justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}dt$ et exprimer sa valeur en fonction de I_1 et de $\lvert s\rvert$.

• Si $s > 0$, l'application $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, $u \mapsto su$ est bijective, strictement croissante et de classe C^1 donc le changement de variable $t = su$ dans l'intégrale convergente I_1 conduit à une intégrale convergente qui lui est égale.
On en déduit que

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(su)}{s^2u^2} s\,\mathrm{d}u$$

et par conséquent que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(su)}{u^2}\,du$ est convergente et égale à sI_1.

- Par parité de la fonction cosinus, on en déduit que pour tout $s \in \mathbb{R}^*$, $u \mapsto \dfrac{1-\cos(su)}{u^2}$ est d'intégrale convergente sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(su)}{u^2}\,du = |s|\,I_1$.
- Le résultat précédent reste vrai pour $s = 0$ car les deux membres existent et valent alors 0.

3. a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, , montrer à l'aide du changement de variable $t = \sqrt{\frac{2u}{n}}$, la convergence de l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\left(\cos\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)^n}{u\sqrt{u}}du$ et déterminer une relation entre J_n et I_n.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, $u \mapsto \sqrt{\frac{2u}{n}}$ est de classe C^1, strictement croissante et bijective, donc le changement de variable $t = \sqrt{\frac{2u}{n}}$ dans l'intégrale convergente I_n conduit à une intégrale convergente qui lui est égale.

On a donc $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\left(\cos\sqrt{\frac{2u}{n}}\ \right)^n}{\frac{2u}{n}} \sqrt{\frac{2}{n}}\frac{du}{2\sqrt{u}} = \boxed{\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}}J_n}$, et, en particulier, la convergence de l'intégrale J_n.

b) Montrer que pour tout $(n,u) \in \mathbb{N}^* \times]0,1]$, $\left|1-\left(\cos\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)^n\right| \leq u$.

L'application $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $u \mapsto g(u) = \left(\cos\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)^n$ est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1]$ et pour tout $u \in]0,1]$,

$$g'(u) = n\sqrt{\frac{2}{n}}\frac{1}{2\sqrt{u}}\left(-\sin\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)\left(\cos\sqrt{\frac{2u}{n}}\ \right)^{n-1} = -\frac{\sin\sqrt{\frac{2u}{n}}}{\sqrt{\frac{2u}{n}}}\left(\cos\sqrt{\frac{2u}{n}}\ \right)^{n-1}$$

Or, d'après **l'inégalité des accroissements finis**, puisque la dérivée de la fonction sin est bornée par 1, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\sin t| \leq |t|$.
On en déduit que pour tout $u \in]0,1]$, $|g'(u)| \leq 1$ et, toujours par l'inégalité des accroissements finis

$$\left|1-\left(\cos\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)^n\right| = |g(0)-g(u)| \leq |u| \ .$$

c) Démontrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$|J_n| \leq \int_0^1 \frac{|1-\left(\cos\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)^n|}{u\sqrt{u}}du + \int_1^{+\infty} \frac{|1-\left(\cos\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)^n|}{u\sqrt{u}}du \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}}\,du + \int_1^{+\infty}\frac{2}{u\sqrt{u}}\,du = 5 \ .$$

Dans la suite de l'exercice, on considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\{-1,1\}$, qui sont mutuellement indépendantes et telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2}\cdot$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

4. a) $\boxed{\text{Montrer que pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ E\big(\cos(t\,S_n)\big) = (\cos t)^n.}$

On montre la propriété par récurrence sur n.

La propriété est vraie pour $n = 1$ car $\cos(t\,S_1)$ est la variable certaine égale à $\cos t$.

On suppose ensuite la propriété vraie à l'ordre n.
Vu que $\cos(t\,S_{n+1}) = \cos(t\,S_n)\cos(t\,X_{n+1}) - \sin(t\,S_n)\sin(t\,X_{n+1})$ et que les variables S_n et X_{n+1} sont indépendantes, on a :

$$\begin{aligned} E(\cos(t\,S_{n+1})) &= E(\cos(t\,S_n))E(\cos(t\,X_{n+1})) - E(\sin(t\,S_n))E(\sin(t\,X_{n+1})) \\ &= (\cos t)^n \cos t - E(\sin(t\,S_n))E(\sin(t\,X_{n+1})) \end{aligned}$$

De plus $E(\sin(t\,X_{n+1})) = \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}\sin(-t) = 0$ donc $E(\cos(t\,S_{n+1}t)) = (\cos t)^{n+1}$.

b) $\boxed{\text{En utilisant les formules trouvées en 2.b et 3.a, exprimer } E(|S_n|) \text{ en fonction de } I_n \text{ et de } I_1.}$

D'après la question 2.b) et la formule de transfert, on a :

$$E(|S_n|) = \sum_{s\in S_n(\Omega)} P(S_n = s)\ \frac{1}{I_1}\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos su}{u^2}\mathrm{d}u$$

Par linéarité de l'intégrale sur l'espace vectoriel des fonctions d'intégrale convergente sur $\mathbb{R}_+^*$ il vient :

$$E(|S_n|) = \frac{1}{I_1}\int_0^{+\infty}\left(\sum_{s\in S_n(\Omega)} P(S_n = s)\frac{1-\cos su}{u^2}\right)\mathrm{d}u$$

d'où en utilisant $\sum_{s\in S_n(\Omega)} P(S_n = s) = 1$ et à nouveau la formule de transfert :

$$E(|S_n|) = \frac{1}{I_1}\int_0^{+\infty}\frac{1-E(\cos S_n u)}{u^2}\mathrm{d}u$$

soit, compte-tenu de la question précédente, $E(|S_n|) = \dfrac{1}{I_1}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-(\cos u)^n}{u^2}\mathrm{d}u = \boxed{\dfrac{I_n}{I_1}}$.

5. $\boxed{\text{En déduire l'existence d'un réel positif } M \text{ tel que pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ E(|S_n|) \le M\sqrt{n}.}$

D'après 3.a), on a $E(|S_n|) = \dfrac{J_n}{2\sqrt{2}\,I_1}\sqrt{n}$ et d'après 3.b), $E(|S_n|) \le M\sqrt{n}$, pour $M = \dfrac{5}{2\sqrt{2}\,I_1}\cdot$

CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille $n \times n$.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $\varphi_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto AM$.

1. Comparer les spectres de A et φ_A.

Il faut commencer par souligner que φ_A est bien un endomorphisme. Nous allons montrer que si λ est une valeur propre de A, alors c'est aussi une valeur propre de φ_A ; et que si μ est une valeur propre de φ_A, c'est aussi une valeur propre de A.

• S'il existe v non nul tel que $Av = \lambda v$, alors $M_v = [v \dots v]$ est une matrice non nulle et telle que $\varphi_A(M_v) = [Av \dots Av] = \lambda[v \dots v] = \lambda M_v$.

• S'il existe une matrice $M = [m_1 \dots m_n]$ non nulle telle que $AM = \varphi_A(M) = \mu M$, alors l'un des m_j est un vecteur non nul et vérifiant $A m_j = m_j$.

2. Comparer, pour chacune de leurs valeurs propres communes, les dimensions des sous-espaces propres de A et φ_A.

Soit λ une valeur propre de A et φ_A.
L'application de $E_\lambda(A)^n$ dans $E_\lambda(\varphi_A)$ qui associe à tout n-uplet $(v_1, \dots, v_n)$ de vecteurs-colonnes de $E_\lambda(A)$ la matrice $[v_1 \dots v_n]$ est un isomorphisme.
La dimension de $E_\lambda(\varphi_A)$ est donc égale à n fois la dimension de $E_\lambda(A)$.

EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours

   Si H est un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien F, rappeler la définition de la projection orthogonale p_H sur H et, pour $x \in F$, donner la caractérisation de $p_H(x)$ par minimisation d'une norme.

   Dans la suite de l'exercice, on considère deux espaces euclidiens E et F de dimensions supérieures ou égales à 2. Le produit scalaire sur F est noté $(\,|\,)$ et la norme associée $\|\ \|$.

   Soit f une application linéaire de E dans F et v un vecteur de F.

2. a) Justifier l'existence d'un vecteur x_0 de E tel que : $\|f(x_0) - v\| = \min\limits_{x \in E} \|f(x) - v\|$.

   Dans la suite, un tel vecteur x_0 sera appelé une pseudo-solution de l'équation $f(x) = v$.

   b) Montrer que si f est injective, l'équation $f(x) = v$ admet une unique pseudo-solution.

3. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases orthonormales de E et F respectivement. On appelle A la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ et V la matrice de v dans $\mathcal{C}$.

   a) Montrer que x_0 est pseudo-solution de l'équation $f(x) = v$ si et seulement si pour tout x de E, $(f(x)|f(x_0) - v) = 0$.

   b) Soit x_0 un vecteur de E et X_0 la matrice de x_0 dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que x_0 est pseudo-solution de $f(x) = v$ si, et seulement si, : ${}^tAAX_0 = {}^tAV$.

   c) Dans cette question on suppose que $E = F = \mathbb{R}^3$ qu'on munit du produit scalaire usuel. On suppose que la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et celle de v est $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Déterminer les pseudo-solutions de $f(x) = v$.

4. Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$ et $c = (c_1, \ldots, c_n)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On souhaite déterminer deux réels λ et μ tels que la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k - c_k)^2$ soit minimale.

   a) Montrer que ce problème équivaut à la recherche des pseudo-solutions d'une équation $f(x) = v$ où f est un élément de $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n)$. Préciser le vecteur v et donner la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^n$.

   b) À quelle condition sur a et b l'application f est-elle injective ?

   c) Lorsque cette condition est réalisée, donner la solution du problème posé en exprimant λ et μ à l'aide de produits scalaires dans $\mathbb{R}^n$.

Sujet S 258

Exercice sans préparation

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier la convergence et donner la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{n-1}\, \mathrm{e}^{-2x}\, \mathrm{d}x$.

2. Trouver la limite quand n tend vers l'infini de $\dfrac{2^n}{(n-1)!} \displaystyle\int_{(n+\sqrt{n})/2}^{+\infty} x^{n-1}\, \mathrm{e}^{-2x}\, \mathrm{d}x$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours

Si H est un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien F, rappeler la définition de la projection orthogonale p_H sur H et, pour $x \in F$, donner la caractérisation de $p_H(x)$ par minimisation d'une norme.

On sait que $H^\perp$ est un sous-espace vectoriel de F qui est un supplémentaire de H dans F et par définition, p_H est le projecteur de F qui a pour image H et pour noyau $H^\perp$.

On a pour tout vecteur y de H, $\|y-x\| \geq \|p_H(x)-x\|$ avec égalité si et seulement si $y = p_H(x)$ donc $p_H(x)$ est l'unique vecteur z de H tel que $\|z-x\| = \min\limits_{y\in H} \|y-x\|$.

Dans la suite de l'exercice, on considère deux espaces euclidiens E et F de dimensions supérieures ou égales à 2. Le produit scalaire sur F est noté $(\,|\,)$ et la norme associée $\|\ \|$.

Soit f une application linéaire de E dans F et v un vecteur de F.

2. a)

Justifier l'existence d'un vecteur x_0 de E tel que : $\|f(x_0)-v\| = \min\limits_{x\in E} \|f(x)-v\|$. Dans la suite, un tel vecteur x_0 sera appelé une pseudo-solution de l'équation $f(x) = v$.

Notons w le projeté orthogonal de v sur $\operatorname{Im} f$. Alors $w \in \operatorname{Im} f$ donc il existe $x_0 \in E$ tel que $w = f(x_0)$ et d'après la question de cours, $\|w-v\| = \min\limits_{z\in \operatorname{Im} f} \|z-v\|$, autrement dit

$$\|f(x_0)-v\| = \min_{x\in E} \|f(x)-v\| .$$

b)

Montrer que si f est injective, l'équation $f(x) = v$ admet une unique pseudo-solution.

L'existence d'une pseudo-solution de $f(x) = v$ a été justifiée en 2a.

Par ailleurs, d'après le rappel de cours, si $x_0 \in E$, x_0 est pseudo-solution de $f(x) = v$ si, et seulement si, $f(x_0)$ est égal au projeté orthogonal w de v sur $\operatorname{Im} f$.

Si f est injective, alors l'élément $w = p_{\operatorname{Im} f}(v)$ de $\operatorname{Im} f$ possède un unique antécédent par f, ce qui établit l'unicité d'une pseudo-solution de $f(x) = v$.

3. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases orthonormales de E et F respectivement. On appelle A la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ et V la matrice de v dans $\mathcal{C}$.

a)

Montrer que x_0 est pseudo-solution de l'équation $f(x) = v$ si et seulement si pour tout x de E, $(f(x)\|f(x_0)-v) = 0$.

Le vecteur x_0 de E est pseudo-solution de $f(x) = v$ si et seulement si $f(x_0) = p_{\mathrm{Im}\, f}(v)$ ce qui équivaut à $f(x_0) \in \mathrm{Im}\, f$ et $v - f(x_0) \in (\mathrm{Im}\, f)^{\perp}$ soit encore à $\forall y \in \mathrm{Im}\, f$, $(y|v - f(x_0)) = 0$ et finalement à $\forall x \in E$, $(f(x)|v - f(x_0)) = 0$.

b) Soit x_0 un vecteur de E et X_0 la matrice de x_0 dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que x_0 est pseudo-solution de $f(x) = v$ si, et seulement si, : ${}^tAAX_0 = {}^tAV$.

Si $x \in E$ a pour matrice X dans la base $\mathcal{B}$, la matrice de $f(x)$ dans la base $\mathcal{C}$ est égale à AX et, vu que la base $\mathcal{C}$ est orthonormée, on a :

$$(f(x)|f(x_0) - v) = {}^t(AX)(AX_0 - V) = {}^tX({}^tAAX_0 - {}^tAV)$$

Notons α le vecteur de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est égale à ${}^tAAX_0 - {}^tAV$.
Alors $(f(x)|f(x_0) - v)$ est égal au produit scalaire dans E entre x et α.
Dans ces conditions, x_0 est pseudo solution de $f(x) = v$ si et seulement si α est orthogonal à tout vecteur de E ce qui équivaut à dire que α est le vecteur nul de E ou encore

$${}^tAAX_0 - {}^tAV = 0 \ .$$

c) Dans cette question on suppose que $E = F = \mathbb{R}^3$ qu'on munit du produit scalaire usuel. On suppose que la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et celle de v est $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Déterminer les pseudo-solutions de $f(x) = v$.

$${}^tAA = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 11 \end{pmatrix} \text{ et } {}^tAV = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On trouve que les pseudo-solutions de $f(x) = v$ sont les vecteurs de la forme $(\frac{1}{4} - 2z, \frac{1}{4} + z, z)$ avec $z \in \mathbb{R}$.

4. Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$ et $c = (c_1, \ldots, c_n)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On souhaite déterminer deux réels λ et μ tels que la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k - c_k)^2$ soit minimale.

a) Montrer que ce problème équivaut à la recherche des pseudo-solutions d'une équation $f(x) = v$ où f est un élément de $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n)$. Préciser le vecteur v et donner la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^n$.

Si on munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel, $\sum\limits_{k=1}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k - c_k)^2 = \|\lambda a + \mu b - c\|^2$ ce qui nous conduit à définir $f \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n)$ tel que $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $f(\lambda, \mu) = \lambda a + \mu b$.

Le problème posé revient alors à chercher les pseudo-solutions de $f(x) = v$ avec $v = c$.

La matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^n$ est $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix}$.

b) À quelle condition sur a et b l'application f est-elle injective ?

f est injective si et seulement si (a, b) est une famille libre.

c) Lorsque cette condition est réalisée, donner la solution du problème posé en exprimant λ et μ à l'aide de produits scalaires dans $\mathbb{R}^n$.

$$^tAA = \begin{pmatrix} \|a\|^2 & (a|b) \\ (a|b) & \|b\|^2 \end{pmatrix} \text{ et } {}^tAV = \begin{pmatrix} (a|c) \\ (b|c) \end{pmatrix}.$$

La solution du problème posé est alors

$$(\lambda, \mu) = \left(\frac{(a|c)\|b\|^2 - (a|b)(b|c)}{\|a\|^2\|b\|^2 - (a|b)^2} \quad , \quad \frac{(b|c)\|a\|^2 - (a|b)(a|c)}{\|a\|^2\|b\|^2 - (a|b)^2} \right).$$

CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier la convergence et donner la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{n-1}\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int_0^{+\infty} x^{n-1}\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2^n}\int_0^{+\infty} t^{n-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(n)}{2^n} = \frac{(n-1)!}{2^n}\ .$$

2. Trouver la limite quand n tend vers l'infini de $\displaystyle\frac{2^n}{(n-1)!}\int_{(n+\sqrt{n})/2}^{+\infty} x^{n-1}\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi $\gamma(1)$.

$$\frac{2^n}{(n-1)!}\int_{(n+\sqrt{n})/2}^{+\infty} x^{n-1}\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n-1)!}\int_{n+\sqrt{n}}^{+\infty} t^{n-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = P([S_n \geq n+\sqrt{n}])$$

où $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ puisque, par la propriété de convolution des lois γ, la variable aléatoire $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ suit la loi $\gamma(n)$.

Par le théorème-limite central, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P([\frac{S_n-n}{\sqrt{n}} \geq 1]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = 1-\Phi(1)$ où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours

   Rappeler la définition de la partie entière $\lfloor x \rfloor$ d'un nombre réel x. Donner l'allure du graphe de la fonction partie entière et en indiquer les principales propriétés.

2. Soit $x > 0$.
   a) Justifier que si $x = M \times 10^n$ avec $1 \leq M < 10$ et $n \in \mathbb{Z}$, alors nécessairement :
   $$n = \lfloor \frac{\ln x}{\ln 10} \rfloor \ .$$
   b) En déduire qu'il existe un unique couple $(\mathcal{M}(x), k(x)) \in [1, 10[\times\mathbb{Z}$ tel que :
   $$x = \mathcal{M}(x) \times 10^{k(x)} \ .$$

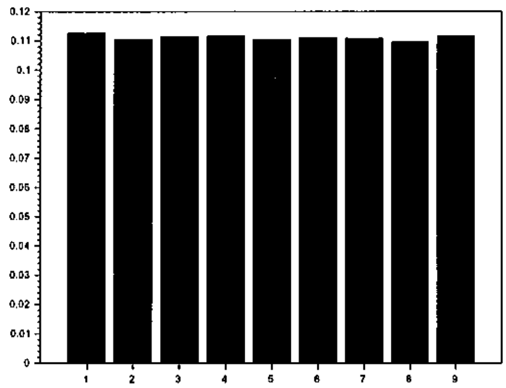
Le nombre réel $\mathcal{M}(x)$ est appelé la mantisse de x et sa partie entière, notée $\mathcal{C}(x)$, le premier chiffre significatif de x.
Par exemple, la mantisse et le premier chiffre significatif de 0,0351 sont respectivement égaux à 3,51 et 3 ; ceux de 6492,253 sont 6,492253 et 6.

3. On appelle *loi de Benford* la loi de $B = 10^U$, où U suit une loi uniforme sur $[0, 1[$.
   a) Montrer que cette loi admet une densité, que l'on calculera.
   b) Déterminer l'espérance de cette loi.
   c) Déterminer la loi de la variable aléatoire $\lfloor B \rfloor$ lorsque B suit la loi de Benford.

4. On considère maintenant un entier $k_0 \in \mathbb{Z}$ et une variable aléatoire Y de loi uniforme sur $]0, 10^{k_0}[$. Identifier les lois de $\mathcal{M}(Y)$ et de $\mathcal{C}(Y)$.

5. On considère le code Scilab suivant, qui crée l'image de droite.

```
n = 10^5;
M = 10*rand(1,n);
C = floor(M./10.^floor(log(M)/log(10)));
H = tabul(C);
bar(H(:,1),H(:,2)/n);
```



   a) Expliquer la signification du code et ce qu'il illustre.
   b) Expliquer comment on pourrait modifier le code précédent pour calculer des réalisations de $\mathcal{M}(B)$ et de $\mathcal{C}(B)$.

Exercice sans préparation

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

On note H le sous-espace vectoriel de E engendré par les trois polynômes $(X-1)(X-2)(X-4)$, $(X-1)(X-3)(X-4)$ et $(X-2)(X-3)(X-4)$.

1. a) Justifier que H est un hyperplan de E.
   b) Trouver une forme linéaire dont le noyau est égal à H. Est-elle unique ?

2. On considère le produit scalaire sur E défini par :

$$\forall (P,Q) \in E^2, \quad < P, Q >= P(1)Q(1) + P(2)Q(2) + P(3)Q(3) + P(4)Q(4)\ .$$

   Calculer, pour tout polynôme $P \in E$, la projection orthogonale de P sur $H^{\perp}$.

Corrigé de l'exercice principal

1. Question de cours

> Rappeler la définition de la partie entière $\lfloor x \rfloor$ d'un nombre réel x. Donner l'allure du graphe de la fonction partie entière et en indiquer les principales propriétés.

La partie entière de x est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x. Elle est donc caractérisée par :

$$\begin{cases} \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} \\ \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \end{cases}.$$

La fonction partie entière est croissante au sens large, continue à droite sur $\mathbb{R}$ et continue en tout point non entier.

2. Soit $x > 0$.

a)
> Justifier que si $x = M \times 10^n$ avec $1 \leq M < 10$ et $n \in \mathbb{Z}$, alors nécessairement :
> $$n = \lfloor \frac{\ln x}{\ln 10} \rfloor .$$

Comme $x = M \times 10^n$, on a les équivalences

$$1 \leq M < 10 \iff 10^n \leq x < 10^{n+1} \iff n \leq \frac{\ln x}{\ln 10} < n + 1$$

ce qui entraîne l'égalité $n = \lfloor \frac{\ln x}{\ln 10} \rfloor$, puisque n est entier.

b)
> En déduire qu'il existe un unique couple $(\mathcal{M}(x), k(x)) \in [1, 10[\times \mathbb{Z}$ tel que :
> $$x = \mathcal{M}(x) \times 10^{k(x)} .$$

La question précédente peut être considérée comme le début d'une analyse, dont la fin (le calcul de M en fonction de x) est immédiate et la synthèse facile.

3. On appelle *loi de Benford* la loi de $B = 10^U$, où U suit une loi uniforme sur $[0, 1[$.

a)
> Montrer que cette loi admet une densité, que l'on calculera.

On calcule tout d'abord la fonction de répartition : pour $x \in [1, 10]$,

$$F(x) = P\big(10^U \leq x\big) = P\big(U \leq \frac{\ln(x)}{\ln(10)}\big) = \frac{\ln x}{\ln 10},$$

et F vaut 0 avant 1 et 1 après 10. Cette fonction F est continue sur $\mathbb{R}$ d'une part, C^1 sur $\mathbb{R}$ privé de 0 et 1 d'autre part, ce qui prouve que B admet une densité f, obtenue par dérivation (là où celle-ci est possible) :

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x \ln 10} & \text{si } 1 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}} .$$

b) Déterminer l'espérance de cette loi.

Par théorème de transfert,

$$E(B) = E\left[10^U\right] = \int_1^{10} x \frac{1}{x \ln 10} \, \mathrm{d}x = \boxed{\frac{9}{\ln 10}} \quad \approx 3{,}91 .$$

c) Déterminer la loi de la variable aléatoire $\lfloor B \rfloor$ lorsque B suit la loi de Benford.

La variable aléatoire $\lfloor B \rfloor$ prend ses valeurs dans $\{1, 2, \ldots, 9\}$: pour j dans cet ensemble,

$$P\Big(\lfloor B \rfloor = j\Big) = P(B \in [j, j+1[) = \int_j^{j+1} \frac{1}{x \ln 10} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\ln 10}\big(\ln(j+1) - \ln(j)\big) .$$

4. On considère maintenant un entier $k_0 \in \mathbb{Z}$ et une variable aléatoire Y de loi uniforme sur $]0, 10^{k_0}[$.

Identifier les lois de $\mathcal{M}(Y)$ et de $\mathcal{C}(Y)$.

On note tout d'abord que $\mathcal{M}(Y)$ prend ses valeurs dans $[1, 10[$ et $\mathcal{C}(Y)$ dans $\{1, 2, \ldots, 9\}$.
On considère le système complet des événements $A_k = [10^{k-1} \leq Y < 10^k]$ pour les entiers relatifs $k \leq k_0$.
On obtient, pour tout $x \in [1, 10[$:

$$\begin{aligned} P\big(\mathcal{M}(Y) \leq x\big) &= \sum_{k=-\infty}^{k_0} P\big(A_k \cap [\mathcal{M}(Y) \leq x]\big) = \sum_{k=-\infty}^{k_0} P\big([10^{k-1} \leq Y < x \times 10^{k-1}]\big) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{k_0} \frac{(x-1)\,10^{k-1}}{10^{k_0}} = \frac{(x-1)}{10^{k_0}} \sum_{k=-\infty}^{k_0} 10^{k-1} \\ &= \frac{(x-1)}{10^{k_0}} \left(10^{k_0 - 1} \sum_{j \geq 0} 10^{-j} \right) = \frac{x-1}{10} \frac{1}{1 - 1/10} \\ &= \frac{x-1}{9} . \end{aligned}$$

La variable aléatoire $\mathcal{M}(Y)$ suit donc la loi uniforme sur $[1, 10[$.

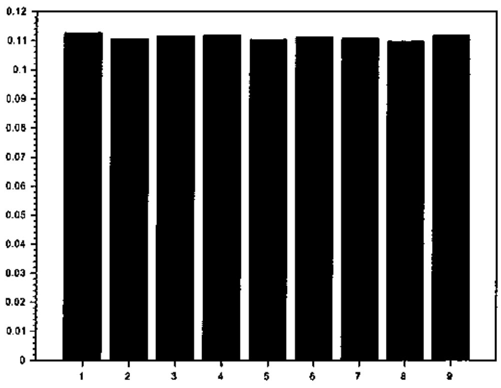
On en déduit que pour $j \in \{1, 2, \ldots, 9\}$,

$$P\big(\mathcal{C}(Y) = j\big) = P\big(\mathcal{M}(Y) \in [j, j+1[\big) = \frac{1}{9} ,$$

c'est-à-dire que $\mathcal{C}(Y)$ suit la loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, 9\}$.

5. On considère le code Scilab suivant, qui crée l'image de droite.

```
N = 10^5;
Y = 10*rand(1,N);
C = floor(Y./10.^floor(log(Y)/log(10)));
H = tabul(C);
bar(H(:,1),H(:,2)/n);
```



a) Expliquer la signification du code et ce qu'il illustre.

La ligne 2 simule $N = 10^5$ variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_N$ indépendantes et identiquement distribuées selon la loi uniforme sur $[0, 10[$.
La ligne 3 extrait les mantisses `Y./10.^floor(log(Y)/log(10))` de ces N nombres, desquelles on prend ensuite les parties entières pour avoir les premiers chiffres significatifs.

Exemple (N=5)

```
--> Y = 10*rand(1,5)
 Y  = 9.1847078     0.4373343     4.8185089     2.639556     4.1481037
--> C = floor(Y./10.^floor(log(Y)/log(10)))
 C  = 9.     4.     4.     2.     4.
```

La ligne 4 regroupe les Y_i par valeurs distinctes et calcule les effectifs associés.

Exemple (suite)

```
--> H = tabul(C)
 H  =  9.    1.
       4.    3.
       2.    1.
```

La ligne 5 trace le diagramme en bâtons de la distribution empirique des Y_i.
Le diagramme confirme l'uniformité de la distribution de $\mathcal{C}(Y)$ (dans le cas où $k_0 = 1$).

b) Expliquer comment on pourrait modifier le code précédent pour calculer des réalisations de $\mathcal{C}(B)$ et $\mathcal{M}(B)$, puis représenter graphiquement leurs distributions.

Pour calculer $\mathcal{C}(B)$: remplacer le `*` par un `^` dans la ligne 2 ; pour calculer $\mathcal{M}(B)$: omettre le `floor` le plus externe dans la ligne 3.
Pour la loi de $\mathcal{C}(B)$: aucun changement, un diagramme avec `tabul` convient très bien.
Pour $\mathcal{M}(Y)$ dont la loi possède une densité sur $[1, 10[$, on peut générer un grand nombre de réalisations et construire un histogramme avec suffisamment de classes avec `histplot`, qui ressemblera à un histogramme uniforme.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

On note H le sous-espace vectoriel de E engendré par les trois polynômes $(X-1)(X-2)(X-4)$, $(X-1)(X-3)(X-4)$ et $(X-2)(X-3)(X-4)$.

1. a) Justifier que H est un hyperplan de E.

   Le sous-espace vectoriel H est un hyperplan puisque c'est un sous-espace vectoriel de dimension $3 = 4 - 1$ de E, car les trois polynômes $(X-1)(X-2)(X-4)$, $(X-1)(X-3)(X-4)$ et $(X-2)(X-3)(X-4)$ sont linéairement indépendants.

   b) Trouver une forme linéaire dont le noyau est égal à H. Est-elle unique ?

   La forme linéaire $\phi : P \longmapsto P(4)$ admet H pour noyau. Les formes linéaires admettant le même noyau que ϕ sont les multiples non nuls de ϕ.

2. On considère le produit scalaire sur E défini par :

$$\forall (P,Q) \in E^2, \quad < P,Q >= P(1)Q(1) + P(2)Q(2) + P(3)Q(3) + P(4)Q(4)\ .$$

   Calculer, pour tout polynôme $P \in E$, la projection orthogonale de P sur $H^\perp$.

   Le polynôme $L = (X-1)(X-2)(X-3)$ étant orthogonal à H, la projection orthogonale de P sur $H^\perp$ est :

$$p(P) = \frac{< L,P >}{< L,L >}\ L = \frac{L(4)P(4)}{L^2(4)}\ L = \frac{P(4)}{6}\ (X-1)(X-2)(X-3)$$

Exercice principal

Soit p un nombre entier supérieur ou égal à 2 et $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ un élément de $\mathbf{R}^p$ avec $a_p \neq 0$.

On note $\mathcal{U}$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $\mathcal{U}_p$ l'ensemble des suites réelles $u \in \mathcal{U}$ qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_{n+p} = a_1 u_{n+p-1} + a_2 u_{n+p-2} + \cdots + a_p u_n \ .$$

1. a) Question de cours : rappeler la définition d'une application bijective.

   b) Soit H l'application de $\mathcal{U}_p$ dans $\mathbf{R}^p$ qui associe à toute suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \in \mathcal{U}_p$ le p-uplet $(u_1, u_2, \dots, u_p)$. Justifier que H est une bijection de $\mathcal{U}_p$ sur $\mathbf{R}^p$.

2. a) Montrer que $\mathcal{U}_p$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et trouver sa dimension.

   b) Trouver une base de l'espace vectoriel des suites $u \in \mathcal{U}$ qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_{n+p} = u_n \ .$$

3. Soit d l'endomorphisme de $\mathcal{U}_p$ défini par :

$$\forall u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \in \mathcal{U}_p, \quad d(u) = (u_{n+1})_{n\in\mathbf{N}^*} \ .$$

   Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de $\mathcal{U}_p$.
   On admet sans démonstration que l'ensemble G des polynômes $P \in \mathbf{R}[X]$ tels que $\big(P(d)\big)(u) = 0_{\mathcal{U}_p}$, où $0_{\mathcal{U}_p}$ désigne la suite nulle de $\mathcal{U}_p$, est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$.

   a) Soit $A \in G$. Démontrer que : $\forall Q \in \mathbf{R}[X],\ Q \times A \in G$.

   b) Soit N l'ensemble des degrés des polynômes non nuls de G. Justifier que N possède un plus petit élément r et qu'il existe dans G un polynôme Π de degré r, dont le coefficient du terme de plus haut degré est égal à 1.

   c) En utilisant la division euclidienne des polynômes, montrer que l'ensemble G est constitué par les polynômes de la forme $Q \times \Pi$, où $Q \in \mathbf{R}[X]$.

4. *Un exemple.* On considère ici le cas où : $p = 3$, $a_1 = 0$, $a_2 = 2$ et $a_3 = 1$.
   On note $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ la suite de $\mathcal{U}_p$ qui vérifie $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ et $u_3 = 1$.

   Trouver un polynôme non nul Π de degré minimal tel que $\big(\Pi(d)\big)(u) = 0_{\mathcal{U}_p}$. Est-il unique ?

EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, suivant chacune la loi uniforme $\mathcal{U}[-\theta,+\theta]$, où θ désigne un paramètre réel strictement positif inconnu.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $U_n = \text{Inf}\{X_1,\cdots,X_n\}$ et $V_n = \text{Sup}\{X_1,\cdots,X_n\}$.

1. Démontrer que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite convergente d'estimateurs de θ.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $T_n = \dfrac{1}{2}\,\text{Sup}\{X_j - X_i\,;\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2\}$.
   a) Exprimer T_n en fonction de U_n et V_n.
   b) En déduire que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite convergente d'estimateurs de θ.

Corrigé de l'exercice principal

Soit p un nombre entier supérieur ou égal à 2 et $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ un élément de $\mathbf{R}^p$ avec $a_p \neq 0$.

On note $\mathcal{U}$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des suites réelles $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ et $\mathcal{U}_p$ l'ensemble des suites réelles $u \in \mathcal{U}$ qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \; u_{n+p} = a_1 u_{n+p-1} + a_2 u_{n+p-2} + \cdots + a_p u_n \; .$$

1. a) Question de cours : rappeler la définition d'une application bijective.

On dit qu'une application f d'un ensemble E dans un ensemble F est bijective lorsqu'elle vérifie :

$$\forall y \in F, \; \exists ! x \in E, \quad f(x) = y \; .$$

b) Soit H l'application de $\mathcal{U}_p$ dans $\mathbf{R}^p$ qui associe à toute suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*} \in \mathcal{U}_p$ le p-uplet $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$.
Justifier que H est une bijection de $\mathcal{U}_p$ sur $\mathbf{R}^p$.

Soit $(v_1, v_2, \ldots, v_p) \in \mathbf{R}^p$.

La suite $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ définie par $\begin{cases} \forall n \in [\![1, p]\!], & u_n = v_n \\ \forall n \geq p+1, & u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_p u_{n-p} \end{cases}$

est, par analyse-synthèse, l'unique suite de $\mathcal{U}_p$ vérifiant $H(u) = (v_1, v_2, \ldots, v_p)$.

2. a) Montrer que $\mathcal{U}_p$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et trouver sa dimension.

On vérifie aisément que $\mathcal{U}_p$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{U}$. Sa dimension est p puisque H est un isomorphisme.

b) Trouver une base de l'espace vectoriel des suites $u \in \mathcal{U}$ qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \; u_{n+p} = u_n \; .$$

On peut constituer une base de cet espace vectoriel à l'aide des images réciproques des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^p$ par l'application H correspondant à $a_1 = \cdots = a_{p-1} = 0$ et $a_p = 1$, c'est-à-dire des p suites $u^{(i)}$ définies (pour $i \in [\![1, p]\!]$), par :

$$u_n^{(i)} = \begin{cases} 1 & \text{si } n - i \in p\mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Soit d l'endomorphisme de $\mathcal{U}_p$ défini par :

$$\forall u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}^*} \in \mathcal{U}_p, \quad d(u) = (u_{n+1})_{n \in \mathbf{N}^*} \; .$$

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite de $\mathcal{U}_p$.

On admet sans démonstration que l'ensemble G des polynômes $P \in \mathbf{R}[X]$ tels que $\big(P(d)\big)(u) = 0_{\mathcal{U}_p}$, où $0_{\mathcal{U}_p}$ désigne la suite nulle de $\mathcal{U}_p$, est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$.

a) Soit $A \in G$. Démontrer que : $\forall Q \in \mathbf{R}[X],\ Q \times A \in G$.

Comme $\big(A(d)\big)(u) = 0_{\mathcal{U}_p}$, on aussi :

$$\big(Q \times A(d)\big)(u) = \big(Q(d)\big)(u) \circ \big(A(d)\big)(u) = 0_{\mathcal{U}_p} \ .$$

b) Soit N l'ensemble des degrés des polynômes non nuls de G. Justifier que N possède un plus petit élément r et qu'il existe dans G un polynôme Π de degré r, dont le coefficient du terme de plus haut degré est égal à 1.

N admet un plus petit élément r, puisque c'est une partie non vide de $\mathbb{N}$ (parce que le polynôme $P = X^p - a_1 X^{p-1} - \cdots - a_p$ vérifie $\big(P(d)\big)(u) = 0_{\mathcal{U}_p}$).
En choisissant un polynôme de degré r dans G et en le divisant par son coefficient dominant, on obtient un polynôme Π de degré r, dont le coefficient du terme de plus haut degré est égal à 1.

c) En utilisant la division euclidienne des polynômes, montrer que l'ensemble G est constitué par les polynômes de la forme $Q \times \Pi$, où $Q \in \mathbf{R}[X]$.

Soit $P \in G$.
Par division euclidienne, $P = \Pi Q + R$ avec $\deg(R) < \deg(\Pi)$.
Or, $\Pi \in G$ et $Q \in \mathbf{R}[X]$, d'où $\Pi Q \in G$ et, par conséquent, $(P - \Pi Q) = R \in G$.
Comme Π est de degré minimal dans G, la condition $\deg(R) < \deg(\Pi)$ entraîne que R est nul.
Par suite, $P = \Pi Q$.
La réciproque est immédiate, puisque $\Pi \in G$ implique $\Pi Q \in G$ pour tout $Q \in \mathbf{R}[X]$.

4. *Un exemple.* On considère ici le cas où : $p = 3$, $a_1 = 0$, $a_2 = 2$ et $a_3 = 1$.
On note $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ la suite de $\mathcal{U}_p$ qui vérifie $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ et $u_3 = 1$.

Trouver un polynôme non nul Π de degré minimal tel que $\big(\Pi(d)\big)(u) = 0_{\mathcal{U}_p}$. Est-il unique ?

Le polynôme $P(X) = X^3 - 2X - 1$ vérifie $\big(P(d)\big)(u) = d^3(u) - 2d(u) - u = 0_{\mathcal{U}_3}$.

Or, $P(X) = (X+1)(X^2 - X - 1) = (X+1)(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)$ avec $\alpha_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\alpha_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

- Aucun polynôme constant non nul Q ne vérifie $\big(Q(d)\big)(u) = 0_{\mathcal{U}_p}$.
- Pour qu'un polynôme $Q(X) = aX + b$ de degré 1 appartienne à G, il faut que $\big(Q(d)\big)(u) = ad(u) + bu = 0_{\mathcal{U}_3}$.

En particulier, on doit avoir $au_2 + bu_1 = 0$ et $au_3 + bu_2 = 0$, ce qui donne $a = b = 0$. Il n'existe donc dans G aucun polynôme non nul de degré égal à 1.

- Posons $\boxed{\Pi(X) = X^2 - X - 1}$. On a : $\big(\Pi(d)\big)(u) = d^2(u) - d(u) - u$.

Posons $\big(\Pi(d)\big)(u) = v = (v_n)_{n \geq 1}$: $\quad \forall n \in \mathbf{N}^*,\ v_n = u_{n+2} - u_{n+1} - u_n$.
On a : $v_1 = u_3 - u_2 - u_1 = 0$, $v_2 = u_4 - u_3 - u_2 = 0$.
Supposons que pour un $n \in \mathbf{N}^*$, on a $v_n = 0$, c'est-à-dire $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
On a alors : $\quad v_{n+1} = u_{n+3} - u_{n+2} - u_{n+1}$,
soit, par définition, $v_{n+1} = 2u_{n+1} + u_n - u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_{n+2} + u_n$ et l'hypothèse de récurrence permet d'écrire : $v_{n+1} = u_{n+1} - u_{n+1} - u_n + u_n = 0$.
Le polynôme non nul Π appartient à G et il est de degré minimal (égal à 2). Il est unique, à un coefficient réel non nul multiplicatif près.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, suivant chacune la loi uniforme $\mathcal{U}[-\theta,+\theta]$, où θ désigne un paramètre réel strictement positif inconnu.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $U_n = \mathrm{Inf}\{X_1,\cdots,X_n\}$ et $V_n = \mathrm{Sup}\{X_1,\cdots,X_n\}$.

1. $\boxed{\text{Démontrer que } (V_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est une suite convergente d'estimateurs de } \theta.}$

   On calcule la fonction de répartition de V_n selon des principes bien répertoriés.

$$P[V_n \leq x] = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\theta \\ (\dfrac{x+\theta}{2\theta})^n & \text{si } -\theta \leq x \leq +\theta \\ 1 & \text{si } x > \theta \end{cases}$$

   qui, lorsque n tend vers l'infini, tend vers la fonction de répartition d'une variable certaine de valeur θ.
   On en déduit que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite convergente (en loi ou en probabilité) d'estimateurs de θ.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $T_n = \dfrac{1}{2}\mathrm{Sup}\{X_j - X_i\,;\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2\}$.

   a) $\boxed{\text{Exprimer } T_n \text{ en fonction de } U_n \text{ et } V_n.}$

$$T_n = \frac{1}{2}\left(V_n - U_n\right) .$$

   b) $\boxed{\text{En déduire que } (T_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est une suite convergente d'estimateurs de } \theta.}$

   Comme $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers θ et, symétriquement, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers $-\theta$, on en déduit (preuve exigible) que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $\dfrac{1}{2}\left(\theta - (-\theta)\right) = \theta$.

EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours

   Soit f une fonction de classe C^2 sur un ouvert Ω non vide de $\mathbb{R}^n$.
   Donner la définition des dérivées directionnelles, première et seconde, de f en un point x de Ω dans la direction $h = (h_1, \ldots, h_n)$.
   Exprimer leurs valeurs en fonction du gradient $\nabla(f)(x)$ et de la matrice hessienne $\nabla^2(f)(x)$ de la fonction f au point x.

2. Soit $X_1, X_2, \cdots, X_n$ des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes et de même loi, admettant chacune une espérance et un écart-type, notés respectivement μ et σ.

   Pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on note : $\quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = E\Big(\big(\sum_{i=1}^{n} x_i X_i \ - \mu \big)^2 \Big)$.

   a) Justifier l'égalité : $\quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 + \mu^2 \big(\sum_{i=1}^{n} x_i \ - 1\big)^2$.

   b) Justifier, pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, l'inégalité : $\quad \big(\sum_{i=1}^{n} x_i\big)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2$.

   c) En déduire le minimum de f sous la contrainte $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$.

3. a) Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$ et trouver son unique point critique a.

   b) Justifier l'égalité :

   $$f(a+h) = f(a) + 2 \int_0^1 (1-t) \Big(\mu^2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} h_i \, h_j + \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} {h_i}^2 \Big) \, \mathrm{d}t \ .$$

   c) En déduire que f admet un minimum global en a.

Exercice sans préparation

Soit un entier $n \geq 2$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E.

Démontrer que, si f n'est pas une homothétie, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f a pour première colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice principal

1. Question de cours

> Donner la définition des dérivées directionnelles, première et seconde, de f au point x dans la direction h pour une fonction f de classe C^2 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Préciser leur valeur en fonction du gradient $\nabla(f)(x)$ et de la matrice hessienne $\nabla^2(f)(x)$ de f au point x.

Soit f de classe C^2 sur Ω. Soit $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \Omega$ et $h = (h_1, \cdots, h_n)$.
On considère la fonction g définie pour tout t tel que $x+th$ appartienne à Ω par $g(t) = f(x+th)$.
Alors g est de classe C^2 au voisinage de 0.
Sa dérivée première en 0 est appelée dérivée directionnelle de f au point x dans la direction h :

$$g'(0) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i(f)(x)h_i = < \nabla(f)(x), h >$$

Sa dérivée seconde en 0 est appelée dérivée seconde directionnelle de f au point x dans la direction h :

$$g''(0) = \sum_{i=1}^{n} h_i \Big(\sum_{j=1}^{n} \partial_{i,j}^2(f)(x)h_j \Big) = \ {}^tH\, \nabla^2(f)(x)\, H$$

2. Pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on note : $\quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = E\Big(\big(\mu - \sum_{i=1}^{n} x_i X_i\big)^2 \Big)$.

> a) Justifier l'égalité : $\quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 + \mu^2 \big(\sum_{i=1}^{n} x_i \ - 1\big)^2$.

Par la formule de Koenig-Huygens, $E((X-a)^2) = V(X) + (E(X) - a)^2$, on obtient :

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = E\Big(\big(\sum_{i=1}^{n} x_i(X_i - \mu) + \mu(\sum_{i=1}^{n} x_i \ - 1) \big)^2 \Big) = V\big(\sum_{i=1}^{n} x_i X_i\big) + \big(\mu(\sum_{i=1}^{n} x_i \ - 1)\big)^2$$

puis l'égalité cherchée par indépendance des X_i.

> b) Justifier, pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, l'inégalité : $\quad (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2$.

Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux vecteurs $(x_1, \cdots, x_n)$ et $(1, \cdots, 1)$, fournit directement l'inégalité demandée.

> c) En déduire le minimum de f sous la contrainte $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$.

Le minimum de f sous la contrainte $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ est $\dfrac{\sigma^2}{n}$, atteint exclusivement au point $\dfrac{1}{n}(1, 1, \ldots, 1)$.

On peut utiliser la condition du premier ordre pour un extremum local sous contrainte linéaire, qui impose l'égalité des x_i, mais cela n'a rien d'indispensable.

3. a) $\boxed{\text{Justifier que } f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^n \text{ et trouver son unique point critique } a.}$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 + \mu^2 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1\right)^2$$

La fonction est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$ parce qu'elle est polynomiale, et ses dérivées partielles sont données par :

$$\partial_i(f)(x) = 2\sigma^2 x_i + 2\mu^2 \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1\right)$$

On en déduit que le seul point critique de f est le point a dont toutes les coordonnées a_i sont égales à

$$\frac{\mu^2}{\sigma^2 + n\mu^2} .$$

b) $\boxed{\text{Justifier l'égalité :} \quad f(a+h) = f(a) + 2\int_0^1 (1-t)\Big(\mu^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_i\, h_j + \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} {h_i}^2\Big)\, dt .}$

On applique la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2 à la fonction $g : t \longmapsto f(a+th)$ entre 0 et 1 :

$$f(a+h) = g(1) = g(0)+g'(0)+\int_0^1 (1-t)g''(t)dt = f(a)+ 2\int_0^1 (1-t)\Big(\mu^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_i\, h_j + \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} {h_i}^2\Big)\, \mathrm{d}t$$

parce que $g'(0) = 0$ et

$$g''(t) = {}^tH\, \nabla^2(f)(a+th)\, H = 2\mu^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_i h_j + 2\sigma^2 \sum_{i=1}^{n} h_i^2$$

c) $\boxed{\text{En déduire que } f \text{ admet un minimum global en } a.}$

Comme $\mu^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_i h_j + \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} h_i^2 = \mu^2 \left(\sum_{i=1}^{n} h_i\right)^2 + \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} h_i^2 \geq 0$, on déduit du résultat précédent que :

$$\forall\, h \in \mathbb{R}^n,\ f(a+h) \geq f(a)$$

ce qui prouve que f admet un minimum global en a.

Corrigé de l'exercice sans préparation

Soit un entier $n \geq 2$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E.
Démontrer que, si f n'est pas une homothétie, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice M de f a pour première colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Cela revient à trouver un vecteur e_1 dont l'image $e_2 = f(e_1)$ ne lui est pas colinéaire (on n'aura plus alors qu'à compléter la famille libre pour former la base cherchée).

Il suffit donc de prouver que tout endomorphisme f de E qui vérifie

$$\forall x \in E,\ \exists k_x \in \mathbb{K},\ f(x) = k_x x$$

est une homothétie vectorielle.

Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et $x = \sum_{i=1}^{n} e_i$.
Il existe des k_i dans $\mathbb{K}$ tels que $\forall i \in \{1, \cdots, n\},\ f(e_i) = k_i e_i$.
alors $f(x) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} k_i e_i = k_x x = k_x \sum_{i=1}^{n} e_i$.
On en déduit que tous les k_i sont égaux à k_x.
f est une homothétie car, pour tout y dans E tel que $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, on a $f(y) = k_x \sum_{i=1}^{n} y_i e_i = k_x y$.

EXERCICE PRINCIPAL

1. a) Question de cours

Quand dit-on qu'une fonction f est négligeable par rapport à une fonction au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$?

b) Soit f une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles.

Démontrer, en utilisant une formule de Taylor, que la différence $f(x) - f(a)$ est négligeable devant $(x-a)^n$ lorsque x tend vers a si, et seulement si, pour tout entier k compris entre 1 et n, la dérivée d'ordre k de f en a est nulle.

$$f(x) - f(a) \underset{x \to a}{=} o\left((x-a)^n\right) \iff \forall k \in [\![1, n]\!],\ f^{(k)}(a) = 0\ .$$

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel a, on note $E_n(a)$ l'ensemble des fonctions de E telles que la différence $f(x) - f(a)$ est négligeable devant $(x-a)^n$ lorsque x tend vers a.

2. Trouver, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}_{n+2}[X]$ vérifiant $P_n(0) = 0$ et $P_n(1) = 1$, et tel que la fonction polynomiale P_n appartient à $E_n(0) \cap E_1(1)$.

3. Soit p un nombre entier supérieur ou égal à 2, $a_1, a_2, \ldots, a_p$ des nombres réels deux à deux distincts et $n_1, n_2, \ldots, n_p$ des nombres entiers strictement positifs.

Soit $m = p - 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{p} n_k$.

Soit Φ l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}^{m+1}$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \Phi(P) = \left(P^{(0)}(a_1), P^{(1)}(a_1), \ldots, P^{(n_1)}(a_1), \ldots, P^{(0)}(a_p), P^{(1)}(a_p), \ldots, P^{(n_p)}(a_p)\right)$$

(où la dérivée 0-ième $P^{(0)}$ de P désigne la fonction polynomiale P elle-même).

a) Vérifier que Φ est linéaire et trouver son noyau.

b) Justifier que le noyau de Φ est un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\mathbb{R}_m[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.

c) En déduire que pour tout $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$, il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à m appartenant à $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{p} E_{n_k}(a_k)$ vérifiant :

$$\forall k \in [\![1, p]\!],\ P(a_k) = \alpha_k\ .$$

Exercice sans préparation

Soit $p \in \mathbb{R}$.

On considère une variable aléatoire réelle X à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant des moments jusqu'à l'ordre 2 et vérifiant :

$$E(X) = E(X^2) = p \cdot$$

1. Montrer que p est compris entre 0 et 1.
2. Montrer que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. a) Question de cours

Quand dit-on qu'une fonction f est négligeable par rapport à une fonction au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$?

b) Démontrer, en utilisant une formule de Taylor, que la fonction f appartient à $E_n(a)$ si, et seulement si, pour tout entier k compris entre 1 et n, la dérivée d'ordre k de f en a est nulle.

Comme f est de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de a, la formule de Taylor-Young permet d'écrire :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o\big((x-a)^n\big) \ .$$

• On en déduit immédiatement que, si les dérivées d'ordre 1 à n de f sont nulles en a, alors f appartient à $E_n(a)$.

• Réciproquement, si f appartient à $E_n(a)$, alors

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = o\big((x-a)^n\big)$$

quand x tend vers a, ce qui rend impossible que l'une des dérivées $f^{(k)}(a)$ (pour $1 \leq k \leq n$) soit différente de 0.

2. Trouver, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}_{n+2}[X]$ vérifiant $P_n(0) = 0$ et $P_n(1) = 1$, et tel que la fonction polynomiale P_n appartient à $E_n(0) \cap E_1(1)$.

En procédant par analyse-synthèse, on suppose d'abord l'existence d'un polynôme P_n vérifiant les conditions exigées.
Comme la fonction polynomiale associée à P_n est plate à l'ordre n et nulle en 0, le polynôme $P_n(X)$ est divisible par X^{n+1} et s'écrit donc sous la forme :

$$P_n(X) = X^{n+1}(aX + b)$$

avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ puisque le degré de P_n est inférieur ou égal à $n+2$.
Le polynôme dérivé de $P_n(X)$ étant $P_n'(X) = X^n\big(n+2)aX + (n+1)b\big)$ les contraintes $P_n(1) = 1$ et $P_n'(1) = 0$ deviennent :

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ (n+2)a + (n+1)b = 0 \end{cases}$$

d'où $a = -(n+1)$ et $b = n+2$, c'est-à-dire :

$$P_n(X) = (n+2)X^{n+1} - (n+1)X^{n+2}$$

qui vérifie effectivement les conditions exigées : c'est donc l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n+2}[X]$ qui vérifie $P(0) = 0$ et $P(1) = 1$, et pour lequel la fonction polynomiale associée appartient à $E_n(0) \cap E_1(1)$.

3. Soit p un nombre entier supérieur ou égal à 2, $a_1, a_2, \ldots, a_p$ des nombres réels deux à deux distincts et $n_1, n_2, \ldots, n_p$ des nombres entiers strictement positifs.

Soit $m = p - 1 + \sum_{k=1}^{p} n_k$.

Soit Φ l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}^{m+1}$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \Phi(P) = \left(P^{(0)}(a_1), P^{(1)}(a_1), \ldots, P^{(n_1)}(a_1), \ldots, P^{(0)}(a_p), P^{(1)}(a_p), \ldots, P^{(n_p)}(a_p)\right)$$

(où la dérivée 0-ième $P^{(0)}$ de P désigne la fonction polynomiale P elle-même).

a)b) Vérifier que Φ est linéaire et que son noyau est un supplémentaire de $\mathbb{R}_m[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.

La linéarité de Φ résulte immédiatement de la linéarité de l'opérateur de dérivation.

Le noyau de Φ est constitué des multiples du polynôme $Q(X) = \prod_{k=1}^{p} (X - a_k)^{n_k+1}$.

Comme $\deg(Q) = \sum_{k=1}^{p} (n_k + 1) = m + 1$, on a bien :

$$\operatorname{Ker}(\Phi) \oplus \mathbb{R}_m[X] = \mathbb{R}[X] .$$

c) En déduire que pour tout $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$, il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à m appartenant à $\bigcap_{k=1}^{p} E_{n_k}(a_k)$ vérifiant :

$$\forall k \in [\![1, p]\!], \ P(a_k) = \alpha_k .$$

Comme $\mathbb{R}_m[X]$ est un supplémentaire du noyau de Φ, l'application linéaire réalise, d'après le théorème image-noyau, un isomorphisme de $\mathbb{R}_m[X]$ sur $\operatorname{Im}(\Phi)$, image qui est nécessairement égale à $\mathbb{R}^{m+1}$ puisque sa dimension est $m + 1$.

Par conséquent, Φ réalise une bijection de $\mathbb{R}_m[X]$ sur $\mathbb{R}^{m+1}$ et le vecteur

$$(\underbrace{\alpha_1, 0, \ldots, 0}_{n_1+1}, \underbrace{\alpha_2, 0, \ldots, 0}_{n_2+1}, \ldots\ldots, \underbrace{\alpha_p, 0, \ldots, 0}_{n_p+1})$$

de $\mathbb{R}^{m+1}$ admet dans $\mathbb{R}_m[X]$ un unique antécédent P par Φ , qui est l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}_m[X]$ appartenant à $\bigcap_{k=1}^{p} E_{n_k}(a_k)$ et vérifiant : $\quad \forall k \in [\![1, p]\!], \ P(a_k) = \alpha_k$.

Corrigé de l'exercice sans préparation

Soit $p \in \mathbb{R}$.

On considère une variable aléatoire réelle X à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant des moments jusqu'à l'ordre 2 et vérifiant :

$$E(X) = E(X^2) = p \cdot$$

1. $\boxed{\text{Montrer que } p \text{ est compris entre 0 et 1.}}$

   $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = p(1-p) \geq 0$, d'où $0 \leq p \leq 1$.

2. $\boxed{\text{Montrer que } X \text{ suit la loi de Bernoulli de paramètre } p.}$

   Comme $E(X^2) - E(X) = \sum_{n=2}^{+\infty} (n^2 - n)\, P([X = n]) = 0$, les probabilités $P([X = n])$ sont nulles pour tout entier $n \geq 2$.

   Il en résulte que X suit une loi de Bernoulli, dont le paramètre est p puisque $E(X) = p$.