HEC
PARIS

ORAL HEC Paris 2019

MATHÉMATIQUES

EXEMPLES DE SUJETS ET DE CORRIGES

Option littéraire B/L

Concours HEC 2019

Sujet BL 1

Exercice principal

Dans l'exercice n désignera un entier non nul.
Toutes les variables aléatoires que l'on considérera sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et, lorsqu'elle existe, on note $E(X)$ l'espérance de la variable aléatoire X.

On place n boules dans n boîtes numérotées de 1 à n selon le protocole suivant : chaque boule est placée uniformément et indépendamment des autres boules (une boîte pouvant donc contenir plusieurs boules). Si U_i désigne le numéro de la boîte contenant la boule numéro i, les variables aléatoires U_i sont ainsi indépendantes et suivent chacune la loi uniforme discrète sur $[\![1, n]\!]$.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ on note N_i la variable aléatoire égale au nombre de boules contenues dans la boîte numéro i et $N = \sup(N_1, \ldots, N_n)$.
La variable aléatoire N désigne donc le plus grand nombre de boules contenues dans une des n boîtes.

1. Question de cours : loi de Poisson. Lien avec les lois binomiales.

2. a) Déterminer, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la loi de la variable aléatoire N_i.
Les variables aléatoires $N_1, \ldots, N_n$ sont-elles indépendantes ?

b) Etablir que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on a : $P([N = k]) \leq \sum_{i=1}^{n} P([N_i = k]) \leq \frac{n}{k!}$.

3. a) Montrer qu'il existe une suite $(\alpha_k)_{k \geq 1}$ de réels positifs et de limite $+\infty$ telle que, pour tout entier k non nul :

$$\left(\frac{e}{\alpha_k}\right)^{\alpha_k} = \frac{1}{k^3}$$

b) Déterminer un équivalent simple de α_n .

4. Etablir que la variable aléatoire N admet une espérance et que, pour tout $\alpha \in [1, n]$ on a :

$$E(N) \leq nP([N > \alpha]) + \alpha$$

5. a) Etablir que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on a : $P([N = k]) \leq \frac{n}{k!}$.

b) Montrer que pour tout entier non nul k, on a : $\frac{1}{k!} \leq \left(\frac{e}{k}\right)^k$.
En déduire que, pour tout $\alpha \in [1, n]$, on a : $P([N > \alpha]) \leq n^2 \left(\frac{e}{\alpha}\right)^{\alpha}$.

6) Démontrer l'existence d'une constante C telle que pour tout entier $n \geq 2$ on a :

$$E(N) \leq C \frac{\ln(n)}{\ln(\ln(n))}$$

Exercice sans préparation

Soit n un entier non nul et $E = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel.
Soit p un entier non nul et $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de vecteur de E telle qu'il existe deux réels A et B strictement positifs vérifiant :

$$\forall x \in E \quad A||x||^2 \leq \sum_{i=1}^{p} < x, e_i >^2 \leq B||x||^2 \quad (\star)$$

1. Soit $F = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$. Montrer que $F = E$.
2. Montrer que si $A = B = 1$ et si tous les vecteurs e_i sont de norme égale à 1, alors la famille $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une base orthonormée de E.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours.

2. a) $N_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{n})$.

b) Les variables aléatoires $N_1, \ldots, N_n$ ne sont pas indépendantes, puisque par exemple on a :

$$P([N_1 = n] \cap [N_2 = n]) = 0 \neq P([N_1 = n])P([N_2 = n]) .$$

3. Étant à support fini, la variable aléatoire N admet une espérance.
De plus : $N = \underbrace{N}_{\leq n} \mathbb{1}_{[N>\alpha]} + \underbrace{N\mathbb{1}_{[N\leq\alpha]}}_{\leq \alpha} \leq n\mathbb{1}_{[N>\alpha]} + \alpha$.

Par propriété de croissance de l'espérance, il s'ensuit que :

$$E(N) \leq nP([N > \alpha]) + \alpha .$$

4. a) Soit $f : t \to f(t) = (\frac{\mathrm{e}}{t})^t = \exp(t\ln(\frac{\mathrm{e}}{t})) = \exp(t - t\ln(t))$.
$f'(t) = -\ln(t)f(t) < 0$ sur l'intervalle $]1, +\infty[$.
La fonction f est ainsi continue et strictement décroissante sur $]1, +\infty[$ et réalise donc une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]\lim\limits_{t\to+\infty} f(t), f(1)[=]0, \mathrm{e}[$.

Puisque $\dfrac{1}{k^3} \in]0, e[$, l'existence et l'unicité d'un réel $\alpha_k > 1$ tel que $f(\alpha_k) = \frac{1}{k^3}$ en résulte.
De plus on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = +\infty$.

b) $f(\alpha_n) = \dfrac{1}{n^3} \iff \alpha_n(1 - \ln(\alpha_n)) = -3\ln(n)$ et puisque $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = +\infty$ on a :

$$\alpha_n \ln(\alpha_n) \sim 3\ln(n) .$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} 3\ln(n) = +\infty$ on peut composer ces équivalents par ln et on obtient :

$$\ln(\alpha_n) + \ln(\ln(\alpha_n)) \sim \ln(\ln(n)) \text{ soit } \ln(\alpha_n) \sim \ln(\ln(n)) .$$

Bilan :

$$\alpha_n \sim 3\frac{\ln(n)}{\ln(\ln(n))}$$

5. a) $[N = k] \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} [N_i = k]$ et donc : $P([N = k]) \leq P(\bigcup\limits_{i=1}^{n} [N_i = k]) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} P([N_i = k])$.
Or, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:
$P(N_i = k) = \binom{n}{k}(\frac{1}{n})^k(1 - \frac{1}{n})^{n-k} = \underbrace{\dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k}}_{\leq 1} \underbrace{(1 - \dfrac{1}{n})^{n-k}}_{\leq 1} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{k!}$.

Il s'ensuit que : $P([N = k]) \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k!} = \dfrac{n}{k!}$

b) Soit X une variable aléatoire telle que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(k)$.
On a : $P([X = k]) \leq 1$ soit $\mathrm{e}^{-k}\dfrac{k^k}{k!} \leq 1$.

L'inégalité attendue $\frac{1}{k!} \leq (\frac{\mathrm{e}}{k})^k$ en résulte.

$$c)\ P([N > \alpha]) = \sum_{k=\lceil\alpha\rceil}^{n} P([N = k]) \leq n \sum_{k=\lceil\alpha\rceil}^{n} \frac{1}{k!} \leq \frac{n^2}{\lceil\alpha\rceil!}$$

$$\leq n^2 (\frac{\mathrm{e}}{\lceil\alpha\rceil})^{\lceil\alpha\rceil} = n^2 f(\lceil\alpha\rceil) \leq n^2 f(\alpha)\ .$$

6. D'après ce qui précède $E(N) \leq n^3 f(\alpha_n) + \alpha_n = 1 + \alpha_n$ et l'équivalent obtenu à la question **4** permet de conclure.

Corrigé de l'exercice sans préparation

1. Il suffit d'établir que $F^\perp = \{0_E\}$. Or, si $x \in F^\perp$ alors, puisque $A > 0$, on a $||x||^2 = 0$ et donc $x = 0_E$.

2. $\forall j \in [\![1, p]\!]$ on a : $||e_j||^2 = ||e_j||^4 + \sum_{i \neq j}^{p} < e_j, e_i >^2$ et puisque les vecteurs e_j sont de norme 1 :

$$\sum_{i \neq j}^{p} < e_j, e_i >^2 = 0\ .$$

Il s'ensuit que : $\forall i \neq j$ on a : $< e_i, e_j >= 0$.
La famille $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$ est donc orthogonale et étant formée de vecteurs tous non nuls, elle est libre.

Bilan : $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une base orthonormée de E.