HEC
PARIS

ORAL HEC Paris 2019

MATHÉMATIQUES

EXEMPLES DE SUJETS ET DE CORRIGES

Option technologique

Concours HEC 2019

Sujet T 2

Exercice principal

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour tout entier n non nul :

$$P([X > n]) \neq 0$$

On dit que X vérifie la propriété d'absence de mémoire lorsque :

$$\forall n \geq 1,\ \forall m \geq 1, \quad P_{[X>n]}([X > n+m]) = P([X > m])$$

1 a) Question de cours : définition d'une suite géométrique.
b) Quelles sont les suites géométriques admettant une limite finie ?

2. Soit T une variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
Établir que T vérifie la propriété d'absence de mémoire.

3. Soit S une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant la propriété d'absence de mémoire.
On pose, pour tout entier $n \geq 1$: $u_n = P([S > n])$.

a) Établir que :
$$\forall n \geq 1,\ \forall m \geq 1, \quad u_{n+m} = u_n u_m\ .$$

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est géométrique.

c) Exprimer $P([S = n])$ en fonction de certains termes de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

d) En déduire que la variable aléatoire S suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

4. Quel résultat a-t-on ainsi démontré ?

Exercice sans préparation

Déterminer une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ admettant :

- $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour vecteur colonne propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 2$

et

- $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ pour vecteur colonne propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 4$.

Corrigé de l'exercice principal

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour tout entier n non nul : $P([X > n]) \neq 0$.
On dit que X vérifie la propriété d'absence de mémoire lorsque :

$$\forall n \geq 1\ \forall m \geq 1 : \quad P_{[X>n]}([X > n+m]) = P([X > m])$$

1 a) Question de cours.
b) Les suites géométriques convergentes sont celles dont la raison appartient à l'intervalle $]-1, +1]$.

2. La variable aléatoire T étant géométrique, on a : $P([T > n]) = (1-p)^n$.

Or :

$$P_{[T>n]}([T > n+m]) = \frac{P([T > n+m] \cap [T > n])}{P([T > n])} = \frac{P([T > n+m])}{P([T > n])} = \frac{(1-p)^{n+m}}{(1-p)^n} = (1-p)^m = P([T > m]) .$$

Bilan : si T suit une loi géométrique alors T vérifie la propriété d'absence de mémoire.

3 a)

$$P_{[S>n]}([S > n+m]) = \frac{P([S > n+m] \cap [S > n])}{P([S > n])} = \frac{P([S > n+m])}{P([S > n])} = \frac{u_{n+m}}{u_n} = u_m .$$

En résulte l'égalité vraie pour tout couple d'entiers non nuls (n, m) : $u_{n+m} = u_n u_m$.

b) L'égalité précédente étant vraie pour tout couple d'entiers non nuls (n, m) on obtient, pour $m = 1$: $u_{n+1} = u_1 u_n$.
La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est donc géométrique de raison u_1.

c) S étant à valeurs entières on a, pour tout entier n non nul :

$$P([S = n]) = P([S > n-1]) - P([S > n]) = u_{n-1} - u_n .$$

d) On a ainsi :

$$P([S = n]) = u_1^{n-1} - u_1^n = u_1^{n-1}(1 - u_1) .$$

La variable aléatoire S suit donc la loi géométrique de paramètre $p = 1 - u_1$.

4. Les variables aléatoires à valeurs entières et qui vérifient la propriété d'absence de mémoire sont les variables aléatoires qui suivent une loi géométrique.

Corrigé de l'exercice sans préparation

Si $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ alors la matrice $A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ convient.