Mathématiques T

Conception ESCP BS

Session 2023

Présentation de l'épreuve.

L'épreuve, assez longue comme d'habitude, comportait quatre exercices, ce qui permettait de juger les candidats sur la presque totalité du programme de l'épreuve : algèbre linéaire, analyse et probabilités (discrètes ou à densité). Encore une fois, les correcteurs ont trouvé le sujet adapté mais aussi très sélectif, notamment au travers de certaines questions très difficiles, tout en respectant scrupuleusement le programme.

- L'exercice 1, portant sur le programme d'algèbre linéaire et de probabilités, proposait de démontrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ était diagonalisable puis d'en déduire le calcul de A^n et enfin d'appliquer ce dernier résultat à l'étude d'une chaîne de Markov à trois états.

- L'exercice 2, portant sur le programme de probabilités, avait pour objectif de vérifier que la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 4x(1-x^2) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ pouvait être considérée comme densité d'une certaine aléatoire X.

Ensuite, on déterminait la fonction de répartition de X, ce qui permettait de montrer que, étant donné deux variables aléatoires U et V suivant la loi uniforme sur $[0,1]$, la variable Z définie par $Z = \sqrt{\min(U,V)}$ a même loi que X.

Pour finir, il fallait compléter un script `Python` pour qu'il permette la simulation de X.

- L'exercice 3, portant sur le programme de probabilités présentait deux variables aléatoires indépendantes, X et Y, de même loi et prenant les valeurs 0, 1 et 2 respectivement avec les probabilités $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$.

On se proposait ensuite d'étudier les variables aléatoires S et T définies par $S = X + Y$ et $T = X\,Y$.

Pour finir, la loi du couple (S,T) était demandée ainsi que le calcul de la covariance de S et T.

- L'exercice 4, portant sur le programme d'analyse, proposait l'étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie

par $u_1=\dfrac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{2(n+1)u_n+1}$.

Un script `Python` à compléter devait permettre le calcul de u_n puis les questions suivantes proposaient de chercher la limite de cette suite.

Ensuite, en considérant la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n=\dfrac{1}{u_n}$, on déterminait explicitement u_n en fonction de n.

La toute dernière question avait pour objectif de montrer qu'une variable aléatoire X dont la loi est donnée par $P(X=n)=u_n$ (pour tout entier naturel n) ne possède pas d'espérance.

Barème

- Les quatre exercices comptaient respectivement pour environ 29%, 21%, 23% et 27% des points de barème.
- Le poids des questions de `Python` représentait 3% des points de barème.

Statistiques.

- Sur les 953 candidats ayant composé (911 candidats en 2022), la note moyenne est de 9,125 sur 20 (un peu supérieure à celle de 2022) avec un écart-type de 5,69 indiquant que les candidats ont été classés de manière très satisfaisante.
- 50% des candidats ont obtenu une note inférieure ou égale à 8 et 25% une note inférieure ou égale à 4,5.
- 25% des candidats ont obtenu une note supérieure ou égale à 14.
- On compte 23 candidats qui se voient attribuer la note maximale de 20.

Analyse des copies.

Comme l'an dernier, le niveau est très hétérogène : les meilleurs ont acquis des techniques et des réflexes de bonne qualité (quelques uns semblent vraiment maîtriser le matériel mathématique qui est à leur disposition) et les moins bons semblent dépassés par ce qui est demandé alors que le sujet était émaillé de questions classiques et, pour certaines, pas vraiment difficiles.

Les correcteurs notent qu'une bonne partie des candidats maîtrisent les calculs (produits matriciels) et techniques classiques (récurrence), ce qui n'a pas toujours été le cas par le passé. En revanche, le calcul numérique (règles de priorité, calculs de puissances, fractions) pose problème à de nombreux candidats même à ceux qui sont par ailleurs capables de rendre une bonne, voire une très bonne copie.

Les copies sont, à de pénibles exceptions près, agréablement présentées et bien rédigées. Rappelons qu'un correcteur ne passe pas de longues minutes à tenter de déchiffrer un passage illisible ou presque, il est donc essentiel d'adopter une présentation claire, simple et honnête.

En ce qui concerne la crédibilité des copies, signalons, entre autres, les quelques points suivants pour lesquels elle est mise à mal :

Exercice 1

- On a constaté de nombreux cas où, avec $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$, le candidat trouve $A^2=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$, ce

qui est correct, mais bute pour conclure que $A^2=A+2I$ …

- De rares candidats utilisent des concepts absolument hors du programme officiel (polynôme caractéristique d'une matrice, inversion d'une matrice avec la transposée de sa comatrice) : il faut savoir que ceci est très sévèrement sanctionné et qu'aucun point n'est distribué dans ces cas !

• À la question 4b), beaucoup trop de candidats écrivent -1^n à la place de $(-1)^n$, ce qui a créé d'énormes confusions dans la suite des calculs obligeant même certains à « s'arranger un peu » avec la vérité pour s'en sortir !

Exercice 2

• Il a été souvent lu que $1-x^2$ est positif sur $[0,1]$ car x^2 est positif ! Malheureusement, ce n'est pas le bon argument.

• Les primitives des fonctions en présence ont donné lieu à certaines choses originales (entre autres « la primitive d'un produit qui serait le produit des primitives » ! De nombreuses erreurs d'inattention ont également « pollué » certaines copies, comme $4x(1-x^2)=4x-4x^2$ au lieu de $4x-4x^3$.

• La fonction de répartition d'une variable suivant la loi uniforme sur $[0,1]$ a été confondue avec celle d'une variable suivant la loi uniforme sur $[a,b]$.

• Pas mal de candidats ont cru avoir trouvé la variance de X après avoir seulement calculé son moment d'ordre 2.

Exercice 3

• L'ensemble des valeurs prises par S et T est très souvent faux, souvent donnés tous les deux comme égaux à $\{0,1,2\}$, ce qui pénalise irrémédiablement le candidat pour la suite de l'exercice et l'oblige à tricher comme écrit dans le point suivant.

• Beaucoup de candidats ont « inventé » la loi de S afin d'obtenir $E(S)=\frac{5}{2}$ comme annoncé ! Même chose avec la loi de T pour obtenir $E(T)=\frac{25}{16}\ldots$

• La linéarité de l'espérance a été très peu souvent citée pour justifier l'égalité $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$, de même avec l'indépendance de X et Y pour $E(XY)=E(X)\times E(Y)$.

Exercice 4

• À la première question, la bonne définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a rarement été démontrée.

• Les problèmes de calcul sur les fractions sont apparus de façon flagrante dans cet exercice avec, par exemple $\dfrac{\frac{1}{2}}{2+1}=\frac{1}{2}\times 3$ ou en faisant évoluer la relation $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{2(n+1)u_n+1}$ donnée par l'énoncé en $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{2(n+1)(u_n+1)}$, du moins c'est ce qu'il apparaît pour les calculs de u_2 et u_3.

• La relation $v_{k+1}-v_k=2(k+1)$ n'a pas empêché les candidats de conclure majoritairement que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était arithmétique (y compris dans de bonnes copies). Rares sont ceux qui ont répondu correctement à cette question.

Conclusion.

L'épreuve a permis de repérer et de mettre en valeur les candidats les mieux préparés (il y en a de très bons) et les plus aptes à trouver leur place dans des études exigeantes qui nécessitent rigueur et honnêteté intellectuelle.

Nous conseillons, comme par le passé, aux futurs candidats de se préparer d'une façon complète, en essayant de ne négliger aucun point des trois "compartiments" du programme (analyse, algèbre linéaire et probabilités), sans faire d'impasses, notamment en probabilités (il y avait des probabilités dans chaque exercice cette année !).

Rappelons que l'on peut obtenir une note honorable sans pour autant traiter les questions compliquées de cette épreuve, mais en s'intéressant seulement à celles pour lesquelles on sait par simple lecture que l'on doit pouvoir les traiter, mais dans ce cas il faut rédiger avec rigueur et précision en restant concentré pour ne pas faire de fautes de calcul et en connaissant les techniques élémentaires.