Rapport et exercices oraux HEC Mathématiques ECG Maths appliquées

Juin 2025

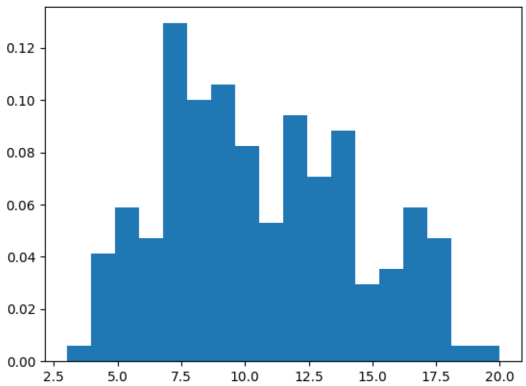
Dans leur grande majorité, les candidats montrent de belles qualités de logique et de présentation. On remarque une large diversité entre eux, les notes s'étalant de 3 à 20.

Les candidats les plus faibles ont montré d'importantes lacunes dans la connaissance du cours ainsi que de grosses faiblesses en calcul.

A contrario, les meilleurs candidats étaient brillants dans leurs connaissances, faisaient preuve de finesse dans leurs raisonnements et démontraient un certain recul sur les concepts étudiés.

La moyenne est de 10,76 et l'écart-type est de 3,94.

```
count    180.000000
mean      10.561111
std        3.985888
min        3.000000
25%        7.000000
50%       10.000000
75%       13.500000
max       20.000000
```



Le jury aimerait insister sur les points suivants.

- Comme les années précédentes, chaque planche comptait, soit dans l'exercice principal, soit dans l'exercice sans préparation, une question d'informatique. Cette question d'informatique faisait intervenir le langage Python, ou bien le SQL. En ce qui concerne le SQL, le jury a pu constater que sa maitrise était trop souvent insuffisante. Certains candidats ne connaissaient pas bien les commandes SQL et le vocabulaire des bases de données était également manipulé avec un grand manque de précision. Le jury a ainsi vu à plusieurs reprises des confusions entre les attributs et les entrées d'une table ou bien entre la notion de clé primaire et celle de clé étrangère.
- Toujours en ce qui concerne l'informatique, les candidats doivent savoir faire tourner du code Python à la main sur des exemples simples. Beaucoup de candidats se sont retrouvés en difficulté quand le jury leur a demandé d'effectuer cette tâche. Par ailleurs, il est également souhaitable que les candidats aient d'eux-mêmes le réflexe de faire tourner le code à la main sans attendre que le jury les y invite, notamment face aux énoncé proposant un code dont il faut expliquer ce qu'il fait.
- Le cours n'est pas suffisamment maîtrisé, il doit être impérativement mieux su. Ainsi, par exemple, dans l'énoncé du théorème des bornes atteintes, plusieurs candidats se contentés de dire qu'il suffisait de se placer sur un ensemble fermé en oubliant l'hypothèse « borné » et il a fallu parfois du temps pour que cet oubli soit corrigé malgré les suggestions du jury.
- Le programme du concours porte sur l'ensemble des deux années et le programme de première année ne doit pas être négligé. Certains candidats, par exemple, ont été pris en défaut sur des questions de convexité. introduite au second semestre de la première année.
- Plusieurs candidats manquent de rigueur dans l'usage du langage mathématique, ce qui est la source d'erreurs. Cela est particulièrement vrai du maniement des quantificateurs : les candidats écrivent des énoncés sans quantificateurs et cette imprécision les amènent à se perdre dans leur raisonnement. Le jury a ainsi rencontré des candidats mis en difficulté dans un raisonnement par récurrence car les hypothèses étaient mal quantifiées.

- Le jury attend des candidats qu'ils soient en mesure d'illustrer leurs raisonnements par des schémas, et qu'ils soient également capables de tracer rapidement l'allure du graphe d'une fonction. Ainsi, dans une planche publiée ci-dessous, était-il demandé de tracer l'ensemble $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1\}$. Cette question a posé d'énormes difficultés aux candidats. De même, certains candidats, au moment de faire un schéma, ont parfois du mal à choisir une échelle pertinente pour leur dessin.
- Le jury souhaite que les candidats se confrontent aux questions difficiles plutôt que de demander systématiquement à les passer pour n'exposer que des questions faciles traitées par l'écrasante majorité des candidats.
- Le jury a trouvé que cette année, beaucoup de candidats manquaient de combativité. Les candidats ne doivent pas oublier qu'il s'agit d'un oral : tout n'est pas joué à l'issue de la préparation et le jury est extrêmement attentif à la qualité du dialogue qu'il noue avec le candidat. Il est fortement conseillé d'écrire au tableau ce qui est proposé par le jury. Des candidats peuvent se voir attribuer une bonne note alors qu'ils ne traitent pas un grand nombre de questions, tandis que d'autres, ayant l'impression d'avoir pourtant traité tout le sujet, se retrouvent avec une note décevante car leur exposition est trop brouillonne et manque de la rigueur exigible dans le maniement des concepts.
- Il est important de participer à la journée de l'oral ou, au moins, de la visionner. Elle répond aux questions de l'organisation et des attendus de chaque oral. Cela permet aux étudiants d'apprendre le déroulement d'un oral du point de vue des membres du jury.

Nous félicitons ceux qui se sont accrochés jusqu'au bout, essayant diverses méthodes, proposant des idées.

L'exercice sans préparation a très bien rempli son rôle et permet de rattraper des premières parties d'oraux mal commencés, ou de confirmer une prestation remarquable.

Voici dix sujets proposés cette année. Nous publions aussi leurs corrigés, mais insistons sur le fait que ces corrigés sont indicatifs, écrits à l'intention des membres de jury et ne correspondent pas toujours exactement à un attendu.

SUJET Maths Appliquées 1

Exercice principal Maths Appliquées 1

On considère une pièce qui fait Pile avec probabilité $p \in]0,1[$ et Face avec probabilité $q = 1 - p$.

Soit n un entier non nul fixé.

On considère n joueurs qui lancent chacun la pièce jusqu'à obtenir Pile. Le ou les gagnants sont désignés comme ceux qui ont fait le moins de lancers.

Pour $i \in [\![1,n]\!]$, soit X_i le nombre de lancers du i-ième joueur, et on note N le nombre de gagnants.

1. Cours : combien y a-t-il de sous-ensembles à k éléments de $[\![1,n]\!]$ lorsque $k \in [\![0,n]\!]$?
2. Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Donner la loi de X_i, son espérance et sa variance.
3. Calculer pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ et tout $j \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_i > j)$.
4. On note $Y = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.
5. (a) Écrire une fonction Python `nombre_min(L)` prenant en argument une liste `L` et renvoyant le nombre de fois où la valeur minimale apparaît dans la liste `L`.
   (b) En déduire une fonction Python `simulN(n,p)` qui, prenant en argument la valeur de n et p, simule l'expérience aléatoire décrite et renvoie la valeur de N.
6. (a) Calculer $\mathbb{P}(N = n)$.
   (b) Montrer que :
$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}(N = k) = \frac{\binom{n}{k} p^k q^{n-k}}{1 - q^n}.$$
7. En déduire l'espérance de N et la variance de N.

Solution :

1. ECG1 Appli p. 16.
2. On cherche le rang du premier succès dans la répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, et donc $X_i \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.
   D'après le cours : $\mathbb{E}(X_i) = \dfrac{1}{p}$ et $\mathbb{V}(X_i) = \dfrac{q}{p^2}$.
3. On a donc pour tous i et j
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_i > j) &= \sum_{k=j+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_i = k)\\ &= \sum_{k=j+1}^{+\infty} pq^{k-1}\\ &= p\sum_{k=j}^{+\infty} q^k\\ &= q^j\end{aligned}$$
4. Soit k un entier. On a alors
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y > j) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i > j]\right)\\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i > j) \quad \text{par indépendance}\\ &= q^{jn}\end{aligned}$$

Ainsi, Y a la même fonction de répartition qu'une loi géométrique de paramètre $1-q^n$, et donc $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(1-q^n)$.

5. (a)
```
def nombre_min(L):
    m = L[0]
    nb = 0
    for x in L:
        if x<m:
            m = x
            nb = 1
        elif x == m:
            nb = nb+1
    return nb
```

(b)
```
def simulN(n,p):
    joueurs = [geom(p) for i in range(n)]
    return nombre_min(joueurs)
```

6. (a) $(N=n) =$ tous les joueurs ont le même résultat. Donc :

$(N=n) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \bigcap_{i=1}^{n} (X_i = k)$, ainsi par incompatibilité :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N=n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} X_i = k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = k) \quad \text{par indépendance} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} p^n q^{n(k-1)} \\
&= \frac{p^n}{1-q^n}
\end{aligned}$$

(b) Soit $k \in [\![1,n]\!]$,notons A_k l'ensemble des parties à k éléments de $[\![1,n]\!]$.

On a $(N=k) = \bigcup_{I \in A_k} \bigcup_{l=1}^{+\infty} \left(\bigcap_{i \in I} (X_i = l) \cap \bigcap_{j \in [\![1,n]\!] \setminus I} (X_j > l)\right)$

Ainsi, par incompatibilité :

$$\mathbb{P}(N=k) = \sum_{I \in \mathcal{A}_k} \sum_{l=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} [X_i = l] \cap \bigcap_{j \in [\![1,n]\!] \setminus I} [X_j > l]\right).$$

Pour chaque partie I de $[\![1,n]\!]$ à k éléments, on a, par indépendance :

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} [X_i = l] \cap \bigcap_{j \in [\![1,n]\!] \setminus I} [X_j > l]\right) &= \sum_{\ell=1}^{+\infty} \left(\prod_{i \in I} \mathbb{P}(X_i = l) \prod_{j \in [\![1,n]\!] \setminus I} \mathbb{P}(X_j > l)\right) \\
&= \sum_{\ell=1}^{+\infty} p^k q^{k(l-1)} q^{(n-k)l} \\
&= \frac{p^k}{q^k} \frac{q^n}{1-q^n} \\
&= \frac{p^k q^{n-k}}{1-q^n}
\end{aligned}$$

Comme le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments est $\binom{n}{k}$, on a bien

$\mathbb{P}(N=k) = \binom{n}{k} \frac{p^k q^{n-k}}{1-q^n}$

7. On a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(N) &= \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(N=k)\\ &= \frac{1}{1-q^n}\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}p^k q^{n-k}\\ &= \frac{np}{1-q^n}\end{aligned}$$

Car on reconnaît l'espérance d'une loi binomiale $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$ qui vaut np.

D'après la formule de Koenig-Huygens : $\mathbb{V}(N) = \mathbb{E}(N^2) - (\mathbb{E}(N))^2$

Par le théorème de transfert

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(N^2) &= \sum_{k=1}^{n} k^2\mathbb{P}(N=k)\\ &= \sum_{k=1}^{n}(k(k-1)+k)\mathbb{P}(N=k)\\ &= \sum_{k=1}^{n} k(k-1)\mathbb{P}(N=k) + \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(N=k)\end{aligned}$$

Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(N=k) = \mathbb{E}(N)$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1)\mathbb{P}(N=k) = \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2}p^k q^{n-k} = p^2 n(n-1)$

On obtient $\mathbb{E}(N^2) = \dfrac{npq+n^2p^2}{1-q^n}$, et donc

$$\mathbb{V}(N) = \frac{npq+n^2p^2}{1-q^n} - \left(\frac{np}{1-q^n}\right)^2.$$

Exercice sans préparation Maths Appliquées 1

Soient f une fonction continue positive décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et $(u_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum u_n$ soit divergente.

On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

On suppose que $\int_0^{+\infty} f$ converge. Montrer que la série $\sum u_n f(S_n)$ converge.

Etudier la réciproque.

Solution :

Le premier point se prouve par une comparaison série-intégrale, en remarquant que $u_n = S_n - S_{n-1}$ d'où par décroissance de f :

$$u_n f(S_n) \leqslant \int_{S_{n-1}}^{S_n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

puis :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k f(S_k) \leqslant \int_0^{S_n} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Les sommes partielles étant majorées et la série $\sum u_k f(S_k)$ à termes positifs elle converge.

La réciproque est fausse. L'idée étant que si la série $\sum u_n$ diverge très vite vers $+\infty$, la série $\sum u_k f(S_k)$ va être convergente sans que l'intégrale le soit. Le jury sera sans doute déjà content si un candidat arrivé à ce point de l'oral réussit à avoir cette intuition et l'expliquer qualitativement.

Un contre exemple est fourni par $u_n = e^{(n+1)^2} - e^{n^2}$, $S_n = e^{(n+1)^2} - 1$ et $f(t) = \dfrac{1}{(t+2)\ln(t+2)}$.

SUJET Maths Appliquées 2

Exercice principal Maths Appliquées 2

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et suivant la loi exponentielle de paramètre 1. On pose $T = \max(X, Y)$ et $W = \dfrac{1}{T}$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier l'existence et la valeur éventuelle de l'espérance de la variable aléatoire W.

1. Cours : donner la définition d'une variable à densité.
2. On suppose que le module Python `numpy.random` a été importé sous l'alias `rd`. Justifier que la fonction Python écrite ci-dessous permet de simuler une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

```
def expo():
    return -log(rd.random())
```

3. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire T.
   Démontrer alors que T admet une densité, et en déterminer une.
4. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :
$$\forall t \in \mathbb{R}^* \qquad \varphi(t) = 2 \times \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}$$
   Montrer que φ se prolonge par une fonction continue en 0.
   On notera encore φ le prolongement obtenu et ainsi φ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
5. (a) Démontrer que la variable aléatoire W admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
   (b) En déduire que W admet une espérance.
6. On admet alors que $\mathbb{E}(W) = \displaystyle\lim_{x \to 0^+} \int_x^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ et on souhaite calculer $\mathbb{E}(W)$.
   (a) Démontrer que : pour tout $x > 0$, les intégrales $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{2x}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ convergent et
$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{2x}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$
   (b) En déduire la valeur de $\mathbb{E}(W)$

Solution :

1. Programme de seconde année, p.16
2. Soient donc $U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[)$ et $Z = -\ln(U)$. Z étant presque sûrement positive, sa fonction de répartition est nulle sur $\mathbb{R}_-$.
   Si $x > 0$, on a alors $\mathbb{P}(Z \leqslant x) = \mathbb{P}(U \geqslant e^{-x}) = 1 - e^{-x}$, et on reconnaît bien la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre 1.
3. Soit F_T la fonction de répartition de la variable T.
   Si $x \leqslant 0$ $F_T(x) = P(T \leqslant x) = 0$
   Si $x > 0$, $F_T(x) = P(T \leqslant x) = P((X \leqslant x) \cap (Y \leqslant x)) = (1 - e^{-x})^2$ par indépendance.

F_T est continue sur $]-\infty,0]$ et sur $]0,+\infty[$, de plus F_T est continue en 0. Ainsi F_T est continue sur $\mathbb{R}$ et est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$. On en conclut que T est une variable à densité et une densité de T est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t)=\begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ 2e^{-t}(1-e^{-t}) & \text{sinon} \end{cases}$$

4. Au voisinage de 0 : $e^{-t}-e^{-2t}=1-t-(1-2t)+o(t)=t+o(t)$ ainsi $\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(t)=2$ donc φ est prolongeable par continuité en 0

   Remarque : on peut aussi (sans utiliser de DL) écrire le numérateur sous la forme $e^{-t}-1-(e^{-2t}-1)$ puis se ramener à des limites usuelles du type $\frac{e^x-1}{x}$ au voisinage de 0

5. (a) D'après le théorème de transfert, la variable W admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{t}f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument.

   Or la fonction f est nulle sur $\mathbb{R}_-$, et $t\mapsto \dfrac{1}{t}f(t)$ est positive sur $\mathbb{R}_+$.

   Ainsi, W admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} 2\frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

   (b) φ est positive sur $\mathbb{R}_+$ et est négligeable devant $t\mapsto e^{-t}$ en $+\infty$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge donc, d'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

6. (a) Soit $x>0$.

   $\dfrac{e^{-2t}}{t}\underset{+\infty}{=}o(e^{-2t})$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty}e^{-2t}\,\mathrm{d}t$ converge donc $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

   De manière analogue $\displaystyle\int_{2x}^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

   Soit $A>0$. Effectuons le changement de variables affine $u=2t$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_x^{A}\frac{e^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t$, on obtient :

   $\displaystyle\int_x^{A}\frac{e^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t=\int_{2x}^{2A}\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$ et donc en passant à la limite lorsque $A\to+\infty$ (possible puisqu'on a établi la convergence au préalable) on obtient le résultat.

   (b) Soit $x>0$. Par combinaison linéaire $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t$ converge. De plus,

   $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t=\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t-\int_x^{+\infty}\frac{e^{-2t}}{t}\,\mathrm{d}t=\int_x^{2x}\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ par Chasles

   Ainsi, W admet une espérance si et seulement si $2\displaystyle\int_x^{2x}\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ admet une limite lorsque $x\to 0$

   Pour $x>0$ et $t\in[x,2x]$, on a $e^{-2x}\leqslant e^{-t}\leqslant e^{-x}$ et par croissance de l'intégrale, on obtient :

   $$2e^{-2x}\int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{t}\leqslant 2\int_x^{2x}\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\leqslant 2e^{-x}\int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{t},$$

   et donc en calculant les intégrales

   $$2e^{-2x}\ln(2)\leqslant 2\int_x^{2x}\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\leqslant 2e^{-x}\ln(2).$$

   Par théorème d'encadrement pour $x\to 0$, on obtient $\lim\limits_{x\to 0^+}2\displaystyle\int_x^{2x}\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t=2\ln(2)$ et ainsi $\mathbb{E}(W)=2\ln(2)$

Exercice sans préparation Maths Appliquées 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 - A = I_n$.

Déterminer, pour tout $p \in \mathbb{N}$, un expression de A^p en fonction de A, I_n et p.

Solution :

Montrons par récurrence que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $(u_p, v_p) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^p = u_p A + v_p I_n$. La propriété est triviale pour $p = 0$: $A^0 = I_n = u_0 A + v_0 I_n$ où $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$.

Supposons le résultat pour $p \in \mathbb{N}$.

$$A^{p+1} = u_p A^2 + v_p A = (u_p + v_p)A + u_p I_n.$$

La propriété est donc héréditaire en posant $u_{p+1} = u_p + v_p$ et $v_{p+1} = u_p$.

La suite u est récurrente linéaire d'ordre 2 :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ u_{p+2} = u_{p+1} + u_p.$$

Puisque $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, on trouve que :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ u_p = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^p - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^p.$$

On en déduit alors que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ v_p = u_{p-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{p-1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{p-1}.$$

On remarquera que la formule est encore vraie pour $p = 0$.

SUJET Maths Appliquées 3

Exercice principal Maths Appliquées 3

Soit f une fonction convexe sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1. Cours. Rappeler la définition de la convexité de f.
2. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, pour tout n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de réels de I, pour tout n-uplet $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ de réels positifs tel que $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$, on a :
$$f(t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n) \leqslant t_1 f(x_1) + \cdots + t_n f(x_n).$$
3. Soit X une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs dans I. Montrer que $f(E(X)) \leqslant E(f(X))$.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
Lors d'une soirée, n amis jouent au jeu suivant. Chacun met un euro sur la table et inscrit pile ou face sur un papier sans que les autres puissent connaître son choix. Un serveur lance ensuite une pièce équilibrée. Sont gagnants ceux qui ont fait le bon choix.
La somme de n euros est partagée (sous forme fractionnaire) entre les gagnants. S'il n'y pas de gagnant, on donne la somme totale au serveur en guise de pourboire.
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note X_k la variable aléatoire égale à la somme que reçoit le joueur k.

4. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, déterminer l'espérance de X_k.
5. On propose à l'un des n joueurs de faire venir une $n+1^{\text{ème}}$ personne dans le jeu : a-t-il intérêt à accepter ?

On revient dans le jeu à n joueurs.

6. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, écrire $E(X_k^2)$ sous la forme d'une somme finie.
7. Montrer que :
$$E(X_k^2) \geqslant 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^2.$$
Puis que :
$$E(X_k^2) \geqslant \frac{2n^2}{(n+1)^2}.$$

Solution :

1. Cours (ECG1 Appli page 20).
2. Par récurrence.
3. En note x_1, ..., x_n les éléments de $X(\Omega)$ et en utilisant la question 2 pour $t_i = P(X = x_i)$.
4. Une méthode efficace est de noter Y_n la variable aléatoire égale à la somme reçue par le serveur, et qui vérifie $\sum_{k=1}^{n} X_k + Y_n = n$.

   Par linéarité de l'espérance, on obtient $\sum_{k=1}^{n} E(X_k) + E(Y_n) = n$.

   De plus $Y_n(\Omega) = \{0, n\}$, et $P(Y_n = n) = \frac{1}{2^n}$, puis $E(Y_n) = \frac{n}{2^n}\cdot$

   Ainsi $\sum_{k=1}^{n} E(X_k) = n - \frac{n}{2^n}\cdot$

   De plus les X_k suivent la même loi, et donc, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $E(X_k) = 1 - \frac{1}{2^n}\cdot$
   On peut également passer par la définition de l'espérance, et la détermination de la loi de X_k (cf q6).

5. Plus le nombre de joueurs est grand, plus l'espérance de gain d'un joueur est grande, et les joueurs ont donc intérêt à accepter la proposition.
6. Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

   On revient ici à la loi de X_k. D'une part $X_k(\Omega) = \left\{0, 1, \dfrac{n}{n-1}, \dots, n\right\}$.

   D'autre part, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P\left(X_k = \dfrac{n}{i}\right) = \dbinom{n-1}{i-1}\dfrac{1}{2^n}\cdot$ Alors

$$\begin{aligned}
E(X_k^2) &= \sum_{x \in X_k(\Omega)} x^2 P(X = x) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{n^2}{i^2}\binom{n-1}{i-1}\frac{1}{2^n} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{i}\binom{n}{i}\frac{1}{2^n} \qquad \text{à l'aide de la formule des chefs.}
\end{aligned}$$

7. On réécrit $E(X_k^2)$ pour pouvoir utiliser le résultat de la question 2 :

$$E(X_k^2) = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{i}\binom{n}{i}\frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\binom{n}{i}}{2^n - 1}\frac{1}{\frac{i}{n}}.$$

Or $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\binom{n}{i}}{2^n - 1} = 1$, et par convexité de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\frac{\binom{n}{i}}{2^n - 1}\frac{1}{\frac{i}{n}} \geqslant \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\binom{n}{i}}{2^n-1}\frac{i}{n}} \\
\text{ie}\quad &\sum_{i=1}^{n}\frac{\binom{n}{i}}{2^n - 1}\frac{1}{\frac{i}{n}} \geqslant \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\binom{n-1}{i-1}}{2^n-1}} \\
\text{ie}\quad &\sum_{i=1}^{n}\frac{\binom{n}{i}}{2^n - 1}\frac{1}{\frac{i}{n}} \geqslant \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} \\
\text{ie}\quad &E(X_k^2) \geqslant \frac{(2^n - 1)^2}{2^{2n-1}} \\
\text{ie}\quad &E(X_k^2) \geqslant 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^2 \\
\text{ie}\quad &E(X_k^2) \geqslant 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^2 \qquad \text{car} \quad \frac{1}{2^n} \leqslant \frac{1}{n+1} \\
\text{ie}\quad &E(X_k^2) \geqslant 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^2
\end{aligned}$$

Exercice sans préparation Maths Appliquées 3

La base de données `communication` gère les envois d'invitations aux différents événements organisés ou gérés par le BDE (bureau des étudiants) d'une école de commerce. Cette base comporte trois tables : la table `personnes` représente les personnes éventuellement invitées, la table `invitation` représente les invitations envoyées et la table `evenements` représente les différents événements auxquels on peut être invité. Le schéma est le suivant, les clés primaires sont soulignées :

— `personnes(`<u>`idpers`</u>`,nom,tel,email)`
avec
`idpers` : identifiant d'une personne, type entier
`nom` : type chaîne de caractères (nom de la personne)
`tel` : type entier (numéro de téléphone de la personne)
`email` : type chaîne de caractères (adresse mail de la personne)

— `invitation(`<u>`idpers,idevenement`</u>`,datedenvoi,message)`
avec
`idpers` : identifiant d'une personne, type entier
`idevenement` : identifiant d'un événement, type entier
`datedenvoi` : type chaîne de caractères (date de l'envoi)
`message` : type chaîne de caractères (contenu du message)

— `evenements`(<u>idevenement</u>,nomevenement,date,lieu)
avec
`idevenement` : identifiant d'un événement, type entier
`nomevenement` : nom de l'événement, type chaîne de caractères
`date` : type chaîne de caractères (date de l'événement)
`lieu` : type chaîne de caractères (lieu de l'événement)

Voici un exemple d'enregistrements de ces trois tables :

table `personnes`

`idpers`	`nom`	`tel`	`mail`
72250	Jeanne Durand	08495673	jeanne.durand@ecole.com
73251	Elia Dupont	08425942	elia.dupont@ecole.com
87288	Kev Forment	09674532	kev.forment@ecole.com

table `invitation`

`idpers`	`idevenement`	`datedenvoi`	`message`
87288	9765	2024-05-10	invitation pour l'événement truc ...
73251	5643	2024-21-11	invitation pour l'événement machin ...

table `evenements`

`idevenement`	`nomevenement`	`date`	`lieu`
9765	soirée d'Halloween	2024-30-10	salle 001
5643	fêtes de fin d'année	2024-19-12	salles 001 et 002

1. Expliquer pourquoi la clé primaire de la table `invitation` comprend deux attributs. Pourrait-on n'en choisir qu'un seul ?
2. Écrire la requête SQL donnant la liste des événements ayant lieu le 5 septembre 2025 ou le 9 octobre 2025.
3. Écrire la requête SQL donnant la liste des messages d'invitations envoyées à Joël Pompon le 12 avril 2024.
4. On décide que chaque invité à un événement pourra, en plus, lors de l'événement recevoir un cadeau et on souhaite préciser lors de l'envoi de l'invitation le cadeau offert en cas de participation. Le BDE dispose d'un stock de cadeaux qui peuvent être utilisés pour n'importe quel événement. Un cadeau est représenté par son type (par exemple : un sac, un mug , une peluche...) et sa taille (petit,moyen, grand).
   Proposer une modification de la base `communication` afin de prendre en compte cette nouvelle contrainte.

5. La commande EXCEPT réalise la différence ensembliste entre les requêtes. Cette commande s'utilise entre 2 instructions pour récupérer les enregistrements de la première requête sans inclure les résultats de la seconde requête.

   Écrire la requête SQL donnant la liste des identifiants des personnes n'ayant pas reçu d'invitation le 14 mai 2023.

Solution :

1. `idpers,idevenement` est une clé primaire car ce couple d'attributs identifie de manière unique une invitation. Un seul de ces attributs ne suffit pas car il y a plusieurs invitations possibles pour un même événement (resp. une même personne). Aucun des deux autres attributs n'identifie de manière unique une invitation.

2.
```
SELECT nomevenement FROM evenements AS ev
WHERE ev.date = "2025-05-09" OR ev.date = "2025-09-10"
```

3.
```
SELECT message FROM invitation AS inv
JOIN personnes AS p ON p.idpers = inv.idpers
WHERE p.nom = "Joel␣Pompon" AND inv.datedenvoi = "2024-12-04"
```

4. On doit créer la table `cadeaux(idcadeau,type,taille)` ce qui peut être réalisé par la commande :

```
CREATE TABLE cadeaux(idcadeau INT PRIMARY KEY, type TEXT, taille INT)
```

   Il faut ensuite ajouter un attribut `idcadeau` à la table `invitation` et le déclarer comme clé étrangère faisant référence à la table `cadeaux`.

5.
```
SELECT idpers FROM personnes
EXCEPT(SELECT idpers FROM invitation AS inv WHERE inv.datedenvoi = "2025-14-05")
```

   Remarque : pour la première requête c'est bien à partir de la table `personnes` qu'il convient de sélectionner `idpers` car si on le fait à partir de la table `invitation`, il manquera à la liste obtenue les personnes qui n'ont été invitées à aucun événement.

Question supplémentaire : écrire la requête SQL donnant (à partir de la base modifiée question 4.) les noms des événements pour lesquels une peluche a été proposée en cadeau.

Corrigé de la question supplémentaire :

```
SELECT nomevenement FROM evenements AS ev
JOIN cadeaux AS ca
JOIN invitation AS inv
ON ca.idcadeau = inv.cadeau AND ev.idevenement = inv.idevenement
WHERE ca.type = "peluche"
```

Remarque : si on veut éviter les "doublons", on peut écrire `SELECT DISTINCT`

SUJET Maths Appliquées 4

Exercice principal Maths Appliquées 4

On admet que l'ensemble $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ -1 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1\}$ est fermé. On considère la fonction f définie sur D par :

$$f(x,y) = (y-x)^2 + 6xy$$

1. Cours : condition nécessaire d'existence d'un extremum local.
2. Représenter graphiquement D puis montrer que la fonction f admet un minimum et un maximum globaux sur D.
3. Déterminer les points critiques de f sur l'ouvert $D' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ -1 < x < y < 1\}$.
4. Déterminer des réels a et b tels que :

$$\forall x \in D, \quad f(x,y) = a(y+x)^2 + b(y-x)^2.$$

5. Montrer que pour tout $(x,y) \in D$, on a $-2 \leqslant f(x,y) \leqslant 6$.
6. En déduire l'ensemble des points de D où f atteint son maximum (respectivement son minimum).
7. Montrer que le point origine $(0,0)$ n'est pas un extremum local de f sur D.

Solution :

1. Cours : 2ème année p.15.
2. La fonction f est continue sur l'ensemble D qui est fermé et borné. Elle est donc bornée et admet un minimum et un maximum globaux sur D.

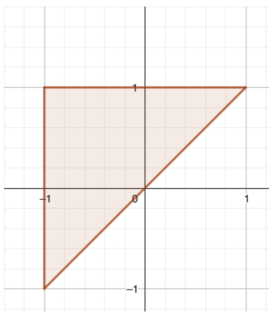


Figure 1 – Le domaine D

3. La fonction f admet des dérivées partielles en tout point de D'. Soit $(x,y) \in D'$.

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-y) + 6y = 0 \\ 2(y-x) + 6x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0.$$

Puisque $(0,0) \notin D'$, f n'admet aucun point critique sur D'.

4. $\forall (x,y) \in D, f(x,y) = (y-x)^2 + 6xy = (y-x)^2 + \frac{3}{2}(x+y)^2 - (x-y)^2] = \frac{3}{2}(y+x)^2 - \frac{1}{2}(y-x)^2.$
5. Pour tout $(x,y) \in D$, $0 \leqslant y - x \leqslant 2$ et $|y+x| \leqslant 2$. Ainsi :

$$-2 = -\frac{1}{2} \times 2^2 \leqslant -\frac{1}{2}(y-x)^2 \leqslant f(x,y) \leqslant \frac{3}{2}(y+x)^2 \leqslant \frac{3}{2} \times 2^2 = 6.$$

6. D'après la question 3, f n'admet pas d'extremum global sur D'.
   Soit $(x,y)\in D$. D'après la question précédente :

$$f(x,y)=-2\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{1}{2}(y-x)^2=-2\\(y+x)^2=0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\begin{cases}|x|=1\\y=-x\end{cases}\quad\Leftrightarrow(x,y)=(-1,1)$$

   car $(1,-1)\notin D$.

$$f(x,y)=6\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{3}{2}(y+x)^2=6\\(y-x)^2=0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\begin{cases}|x|=1\\y=x\end{cases}\quad\Leftrightarrow(x,y)\in\{(1,1),(-1,-1)\}.$$

7. Remarquons que $f(0,0)=0$. Pour $(x,y)\in[-1,1]$, $f(-y,y)=-2y^2\leqslant 0=f(0,0)\leqslant 6x^2=f(x,x)$. Le point $(0,0)$ n'est donc pas un extremum local.

Exercice sans préparation Maths Appliquées 4

Un sauteur en hauteur tente de franchir, dans cet ordre, des hauteurs successives numérotées 1, 2, etc., jusqu'à ce qu'il échoue. Il est éliminé à son premier échec.
Pour tout entier naturel non nul k la probabilité de franchir la hauteur k vaut $1/k$.
On note X la variable aléatoire égale au numéro du dernier saut réussi.

1. Écrire une fonction Python prenant en paramètre N et permettant d'obtenir N simulations de la variable aléatoire X, données sous forme de liste, ainsi qu'une estimation de son espérance.
2. Détermine l'espérance, puis la variance de la variable X.

Solution :

1. Voilà le programme informatique.

```python
import numpy.random as rd

def simule (N) :
    S=0
    simul=[]
    for i in range (N) :
        k=1
        a=rd.random()
        while a<=1/k :
            k+=1
            a=rd.random()
        simul.append(k−1)
        S+=k−1
    return(simul, S/N)
```

2. On a d'abord $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P(X = k) = 1 \times \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{k} \times \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{k}{(k+1)!}.$$

On obtient donc : $E(X) = \sum_{k \geqslant 1} k\ P(X = k) = \sum_{k \geqslant 1} \frac{k^2}{(k+1)!}$, ce qui n'est pas si facile à calculer.
Plus facilement : $E(X + 1) = \sum_{k \geqslant 1} (k + 1)\ P(X = k) = \sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{(k-1)!} = \sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{k!} = e$.
Par linéarité, on obtient : $E(X) = e - 1$.
Pour la variance, on commence par déterminer $E(X^2) = \sum_{k \geqslant 1} k^2\ P(X = k) = \sum_{k \geqslant 1} \frac{k^3}{(k+1)!}$, ce qui n'est pas non plus facile à calculer.
Plus simplement $E\left((X-1)(X+1)\right) = \sum_{k \geqslant 1} (k-1)(k+1)\, P(X = k) = \sum_{k \geqslant 2} \frac{1}{(k-2)!} = e$ pour la même raison.
Et donc $E(X^2) = E(X^2 - 1) + 1 = E\left((X-1)(X+1)\right) + 1 = e + 1$.
Finalement $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = (e + 1) - (e - 1)^2 = e(3 - e)$.

SUJET Maths Appliquées 5

Exercice principal Maths Appliquées 5

On modélise le comportement des usagers d'un réseau de transports en commun de type métro, à une station donnée. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Un usager montera dans un des n trains qui arrivent successivement à cette station.

Lors de son arrivée à une station, un train est plus ou moins plein et on quantifie son taux de places disponibles (debout ou assise) par une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0,1]$, ce taux est d'autant plus élevé qu'il y a de places disponibles dans le train.

On considère qu'un usager monte dans le premier train dont le taux de places disponibles est supérieur ou égal à un seuil $s \in]0,1[$ fixé et dans le cas où aucun des $n-1$ premiers trains ne dépasse le seuil s, l'usager monte dans le dernier train (le n-ième).

On note X_i la variable aléatoire donnant le taux de places disponibles du i-ème train.
De plus, on suppose que les variables $(X_1, \dots, X_n)$ sont mutuellement indépendantes.

Pour tout $k \in [\![2, n-1]\!]$, on note A_k l'événement : « pour tout $i \in [\![1, k-1]\!]$, $(X_i < s)$ et $(X_k \geqslant s)$ »,
et B l'événement : « pour tout $k \in [\![2, n-1]\!]$, $(X_k < s)$ »
On définit par conséquent la variable aléatoire $Z_{n,s}$, taux de places disponibles du train choisi par l'usager, comme suit :

$$Z_{n,s} = \begin{cases} X_n & \text{si } B \text{ est réalisé,} \\ X_k & \text{si } A_k \text{ est réalisé } (1 \leqslant k \leqslant n-1) \end{cases} .$$

1. Cours : énoncer la formule des probabilités totales pour un système complet d'événements fini.
2. (a) Écrire une fonction Python `simulZ(n,s)` qui prend en argument un réel $s \in]0,1[$, un entier naturel non nul n, et simule la variable $Z_{n,s}$.
   (b) En déduire une fonction Python `simul_moy(n,s)` qui prend en argument un réel $s \in]0,1[$, un entier naturel non nul n et qui renvoie une valeur approchée du taux moyen de places disponibles dans le train choisi via ce protocole.
3. Calculer $\mathbb{E}(Z_{n,0})$ et $\mathbb{E}(Z_{n,1})$.
4. Montrer que, pour tout $t \in [0,1]$, on a : $\mathbb{P}(B \cap (Z_{n,s} \leqslant t)) = s^{n-1}t$.

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que $0 < s < 1$.

5. Soit $t \in [0,1]$. Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, montrer que :

$$\mathbb{P}(A_k \cap (Z_{n,s} \leqslant t)) = \begin{cases} (t-s)s^{k-1} & \text{si } t \geqslant s \\ 0 & \text{si } t < s \end{cases} .$$

6. Montrer que $Z_{n,s}$ est une variable à densité, et en donner une densité.
7. Déterminer $\mathbb{E}(Z_{n,s})$ puis déterminer le seuil s_n^* qui maximise, en fonction de n, le taux moyen de places disponibles du train choisi par l'usager.

Solution :

CORRIGÉ

1. Programme de 1ère année VI.5 (semestre 1) p.16.

2. ```
   import numpy.random as rd
   def simulZ(n,s):
       for i in range(1,n):
           x = rd.random()
           if x > s:
                   return x
       return rd.random()

   def simul_moy(n,s):
       N = 1000
       S = 0
       for i in range(N):
           S += simulZ(n,s)
       return S/N
   ```

3. Si le seuil est fixé à 0, alors l'usager montera presque sûrement dans le premier train. Ainsi,

$$\mathbb{E}(Z_{n,0}) = \mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{2}.$$

Si le seuil est fixé à 1, alors presque sûrement aucun train n'aura le taux de places disponibles nécessaire, et donc l'usager montera dans le dernier train. Ainsi

$$\mathbb{E}(Z_{n,1}) = \mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{2}.$$

4. Si $s = 0$, alors la probabilité de B est nulle, et donc la probabilité cherchée est nulle aussi, et l'égalité est vraie.
Si $s > 0$, alors $\mathbb{P}(B) \neq 0$, et par la formule des probabilités composées,

$$\mathbb{P}(B \cap (Z_{n,s} \leqslant t)) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}_B(Z_{n,s} \leqslant t).$$

Sachant que B est réalisé et B et X_n étant indépendants, on a :

$$\mathbb{P}_B(Z_{n,s} \leqslant t) = \mathbb{P}(X_n \leqslant t) = t.$$

Ensuite, B est réalisé ssi $X_i < s$ pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$. Chacun des ces événements est de probabilité s, et par indépendance, on a donc

$$\mathbb{P}(B) = s^{n-1}.$$

Finalement : $\mathbb{P}\left(B \cap (Z_{n,s} \leqslant t)\right) = s^{n-1}t$.

5. On a par indépendance

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_k \cap [Z_{n,s} \leqslant t]) &= \mathbb{P}([X_1 < s] \cap [X_2 < s] \cap \cdots \cap [X_{k-1} < s] \cap [s \leqslant X_k \leqslant t]) \\ &= \begin{cases} s^{k-1}(t-s) & \text{si } t \geq s \\ 0 & \text{si } t < s \end{cases}\end{aligned}$$

6. Déterminons la fonction de répartition de $Z_{n,s}$. D'après la formule des probabilités totales, avec le système complet d'événements $\{A_1, \ldots, A_{n-1}, B\}$.
Si $t \geqslant s$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z_{n,s} \leqslant t) &= \sum_{k=1}^{n-1} P(A_K \cap [Z_{n,s} \leqslant t]) + \mathbb{P}(B \cap [Z_{n,s} \leqslant t]) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} s^{k-1}(t-s) + s^{n-1}t \\ &= (t-s)\frac{1-s^{n-1}}{1-s} + ts^{n-1}\end{aligned}$$

Si $t < s$, la même formule donne

$$\mathbb{P}(Z_{n,s} \leqslant t) = ts^{n-1}.$$
   ```

$Z_{n,s}$ est à valeurs dans [0,1] donc $F_{Z_{n,s}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases}$ Ainsi, avec la question précédente :

$$F_{Z_{n,s}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ ts^{n-1} & \text{si } 0 \leq t < s \\ (t-s)\dfrac{1-s^{n-1}}{1-s} + ts^{n-1} & \text{si } s \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

La fonction de répartition de $Z_{n,s}$ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\backslash\{0, t, 1\}$. On vérifie par limites à droite et à gauche qu'elle est continue en ces trois points donc continue sur $\mathbb{R}$.
Ainsi, $Z_{n,s}$ est une variable à densité.

$$F'_{Z_{n,s}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ s^{n-1} & \text{si } 0 < t < s \\ \dfrac{1-s^n}{1-s} & \text{si } s < t < 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

donc $Z_{n,s}$ admet pour densité (par exemple) :

$$f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ s^{n-1} & \text{si } 0 \leq t < s \\ \dfrac{1-s^n}{1-s} & \text{si } s \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

7. $Z_{n,s}$ admet une espérance car l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente ($Z_{n,s}$ est en effet à valeurs dans $[0,1]$).

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_{n,s}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^s tf(t)\,\mathrm{d}t + \int_s^1 tf(t)\,\mathrm{d}t \\ &= s^{n-1}\frac{1}{2}s^2 + \frac{1-s^n}{1-s}\frac{1}{2}(1-s^2) \\ &= \frac{1}{2}s^{n+1} + \frac{1}{2}(1-s^n)(1+s) \\ &= \frac{1}{2}(1-s^n+s) \end{aligned}$$

Soit $\varphi :]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall s \in]0,1[,\ \varphi(s) = \frac{1}{2}(1-s^n+s).$$

Alors φ est dérivable, et pour tout $s \in]0,1[$,

$$\varphi'(s) = \frac{1}{2}\left(1-ns^{n-1}\right).$$

La fonction φ est donc croissante sur $\left]0, \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right]$ et décroissante sur $\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}, 1\right[$.

Elle admet donc un maximum en $s_n^* = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$, qui vaut

$$\varphi(s_n^*) = \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} - \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}}\right).$$

Exercice sans préparation Maths Appliquées 5

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite à termes strictement positifs.
Dans les deux cas suivants, montrer que les séries de termes généraux respectifs u_n et v_n sont de même nature :

1. si le terme général v_n vérifie $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$;
2. si le terme général v_n vérifie $v_n = \dfrac{u_n}{u_1+u_2+...+u_n}$.

Solution :

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant à termes positifs, il en est de même de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et ainsi les sommes partielles de leurs séries soit convergent soit tendent vers $+\infty$.

1. • Dans le cas où la série $\sum u_n$ converge.
   Dans ce cas la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de limite nulle, et donc $\dfrac{v_n}{u_n} = \dfrac{1}{1+u_n} \to 1$, et donc $v_n \sim u_n$.
   Par comparaison des séries à termes positifs, on obtient que $\sum v_n$ converge.

   • Dans le cas où la série $\sum v_n$ converge.
   En remarquant que $u_n = \dfrac{v_n}{1-v_n}$, on obtient par un raisonnement analogue la convergence de $\sum u_n$.

   Les deux séries sont donc de même nature.

2. • Dans le cas où la série $\sum u_n$ converge.
   On note $S = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$. Et, par passage à la limite $S \geqslant u_1$, donc $S > 0$.
   Dans ce cas la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de limite nulle, et donc $\dfrac{S\times v_n}{u_n} = \dfrac{S}{u_1+\cdots+u_n} \to 1$, et donc $v_n \sim \dfrac{u_n}{S}$.
   Par comparaison des séries à termes positifs, on obtient que $\sum v_n$ converge.

   • Dans le cas où la série $\sum v_n$ converge.
   Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.
   Nécessairement $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, et donc $-\ln(1-v_n) \sim v_n$.
   On obtient donc que $\sum -\ln(1-v_n)$ converge. Regardons la suite des sommes partielles de cette série convergente.

   $$\forall n \geqslant 2, \quad \sum_{k=2}^{n} -\ln(1-v_k) = \sum_{k=2}^{n} -\ln\left(1 - \frac{u_k}{1+\cdots+u_k}\right) = \sum_{k=2}^{n} -\ln\left(\frac{S_{k-1}}{S_k}\right) = \ln(S_n) - \ln(S_1)$$

   Comme $\sum -\ln(1-v_n)$ converge, alors la suite des sommes partielles $\left(\sum\limits_{k=2}^{n} -\ln(1-v_k)\right)_n$ est de limite finie, et il en est donc de même de la suite $(\ln(S_n))_n$.
   Par continuité de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$, on obtient que la suite $(S_n)_n$ a une limite finie, ie que la série $\sum u_k$ converge.

   Les deux séries sont donc de même nature.

SUJET Maths Appliquées 6

Exercice principal Maths Appliquées 6

Un joueur dispose de N dés équilibrés. Il lance une première fois ceux-ci et on note X_1 le nombre de « six » obtenus. Il met de côté les dés correspondants et relance les autres dés (s'il en reste). On note X_2 le nombre de « six » obtenus et on répète l'expérience, définissant ainsi une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On note S_n la variable aléatoire égale au nombre de « six » obtenus après n lancers.

1. Cours : formule des probabilités totales.
2. Écrire en Python une fonction prenant en argument deux entiers non nuls n et N et simulant une réalisation de la variable aléatoire S_n.
3. Pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, déterminer la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $[S_n = k]$.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n suit une loi binomiale de paramètres N et p_n où $p_{n+1} = \dfrac{1+p_n}{6}$.
5. Déterminer une expression de p_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
6. On note T la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires à l'obtention des N « six ».
   (a) Écrire en Python une fonction prenant en argument un entier N non nul et simulant une réalisation de la variable aléatoire T.
   (b) Exprimer l'événement $[T = 1]$ à l'aide de la variable S_1 et, pour tout entier $n \geqslant 2$, exprimer l'événement $[T = n]$ à l'aide des variables aléatoires S_n et S_{n-1}.
   (c) En déduire la loi de T.

Solution :

1. Cours : 1ère année p.17
2.
```
import numpy.random as rd

def S(N,n):
    des_restants = N
    s = 0
    for k in range(n):
        x=rd.binomial(des_restants,1/6)
        des_restants =des_restants-x
        s += x
    return s
```
3. Pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $[S_n = k]$ est la loi binomiale de paramètres $N-k$ et $\dfrac{1}{6}$ en reconnaissant un nombre de succès lors de la répétitions de $N-k$ expériences de Bernoulli indépendantes de probabilité de succès $\dfrac{1}{6}$.
4. On montre le résultat par récurrence. Il est trivial pour $n = 1$ et on trouve que $p_1 = \dfrac{1}{6}$. Supposons que S_n suive la loi binomiale de paramètres N et p_n. Remarquons que $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$. $([S_n = k])_{0\leqslant k\leqslant N}$ est un

système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\forall j \in [\![0, N]\!],\ \mathbb{P}(S_{n+1} = j) &= \sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}([S_n = k] \cap [S_{n+1} = j]) \\
&= \sum_{k=0}^{j} \mathbb{P}(S_n = k)\mathbb{P}(X_{n+1} = j - k \mid S_n = k) \\
&= \sum_{k=0}^{j} \binom{N}{k} p_n^k (1 - p_n)^{N-k} \binom{N-k}{j-k} \left(\frac{1}{6}\right)^{j-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-j} \\
&= \binom{N}{j} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-j} (1 - p_n)^{N-j} \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} p_n^k (1 - p_n)^{j-k} \left(\frac{1}{6}\right)^{j-k} \\
&= \binom{N}{j} \left(\frac{5 - 5p_n}{6}\right)^{N-j} \left(\frac{1 + 5p_n}{6}\right)^{j}.
\end{aligned}$$

Puisque $\dfrac{5 - 5p_n}{6} + \dfrac{1 + 5p_n}{6} = 1$, S_{n+1} suit la loi binomiale de paramètres N et p_{n+1} où $p_{n+1} = \dfrac{1 + 5p_n}{6}$.

5. La suite (p_n) est une suite arithmético-géométrique. Puisque $\ell = \dfrac{1 + 5\ell}{6} \Leftrightarrow \ell = 1$, posons $u_n = p_n - 1$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = u_1 \left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1} = -\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n}$ et enfin $p_n = 1 - \left(\dfrac{5}{6}\right)^{n}$.

6. (a)
```
def T(N):
    n = 0
    des_restants = N
    while des_restants > 0:
        des_restants -= rd.binomial(des_restants ,1/6)
        n=n+1
    return n
```

   (b) On trouve que $[T = 1] = [S_1 = N]$ et :

$$\forall n \geqslant 2,\ [T = n] = [S_n = N] \cap [S_{n-1} \neq N] = [S_n = N] \setminus [S_{n-1} = N].$$

   (c) La loi de T est donc donnée par $\mathbb{P}(T = 1) = \mathbb{P}(S_1 = N) = p_1^N = \dfrac{1}{6^N}$ et :

$$\forall n \geqslant 2,\ \mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(S_n = N) - \mathbb{P}(S_{n-1} = N) = p_n^N - p_{n-1}^N = \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^N - \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right)^N$$

   En bonus, on peut demander un équivalent de $\mathbb{P}(T = n)$ lorsque n tend vers $+\infty$. À l'aide de la formule du binôme, on trouve que $\mathbb{P}(T = n) \underset{n \to +\infty}{\sim} N \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$.

Exercice sans préparation Maths Appliquées 6

Soient $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \int_0^1 x^k f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Montrer que f s'annule au moins n fois sur $]0,1[$.

Solution :
On remarque que f s'annule au moins une fois sur $]0,1[$ car son intégrale est nulle.

Supposons par l'absurde que f s'annule exactement k fois sur $]0,1[$, où $0 < k < n$. Notons $a_1, \ldots, a_j$ les points où f s'annule sur $]0,1[$ en changeant de signe et considérons le polynôme $P : x \mapsto (x-a_1)\cdots(x-a_j)$. Remarquons que $j \neq 0$ car sinon f serait de signe constant sur $]0,1[$, ce qui est est exclu.

Par linéarité de l'intégrale, on trouve alors que :

$$\int_0^1 P(x)f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Or, la fonction Pf est de signe constant sur $[0,1]$ par construction de P. On en déduit alors que la fonction Pf est nulle sur $[0,1]$ donc que f est nulle sur $[0,1]$ privé d'un nombre fini de valeurs (les racines de P), ce qui est absurde par hypothèse.

SUJET Maths Appliquées 7

Exercice principal Maths Appliquées 7

On souhaite estimer la proportion $p \in]0,1[$ de personnes, au sein d'une population, abonnées à un réseau social.

On note : $q = 1 - p$.

Soit un entier $n \geqslant 1$ fixé. On considère un n-échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de variables aléatoires, indépendantes, suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p et définies sur un même espace probabilisé.

On note : $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Cours : énoncer l'inégalité de Markov.
2. Déterminer l'espérance et la variance de $\overline{X_n}$. Justifier que $\overline{X_n}$ est un estimateur sans biais de p.
3. (a) Écrire une fonction Python `simulXbarre(n,p)` prenant en arguments un entier `n` et une probabilité `p`, et qui simule la variable $\overline{X_n}$.

   (b) Montrer, en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, que l'intervalle $\left[\overline{X_n} - \sqrt{\dfrac{5}{n}} ; \overline{X_n} + \sqrt{\dfrac{5}{n}}\right]$ est un intervalle de confiance de p au niveau de confiance $0,95$.

On se propose de déterminer un intervalle de confiance d'une autre manière.

4. On fixe un réel strictement positif t quelconque et ε un réel strictement positif quelconque.

   (a) Établir l'égalité : $\mathbb{P}\left(\overline{X_n} - p \geqslant \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(e^{nt\overline{X_n}} \geqslant e^{nt(p+\varepsilon)}\right)$

   (b) Établir l'inégalité suivante : $\mathbb{P}\left(\overline{X_n} - p \geqslant \varepsilon\right) \leqslant e^{n\left(\ln(pe^t+q) - t(p+\varepsilon)\right)}$

   (c) On admet l'inégalité : $\ln(pe^t + q) - tp \leqslant \dfrac{t^2}{8}$. Ainsi, on a l'inégalité suivante :

   $$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \mathbb{P}\left(\overline{X_n} - p \geqslant \varepsilon\right) \leqslant e^{n\left(\frac{t^2}{8} - t\varepsilon\right)}$$

   En déduire l'inégalité : $\mathbb{P}\left(\overline{X_n} - p \geqslant \varepsilon\right) \leqslant e^{-2n\varepsilon^2}$

5. Soit $\overline{Y_n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(1 - X_k)$. On admet que par un raisonnement analogue : $\mathbb{P}\left(\overline{Y_n} - q \geqslant \varepsilon\right) \leqslant e^{-2n\varepsilon^2}$.

   Montrer que :

   $$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad \mathbb{P}\left(\left|\overline{X_n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 2e^{-2n\varepsilon^2}$$

6. Comment choisir ε pour obtenir un intervalle de confiance de p au niveau de confiance 0,95 ? L'estimation de p obtenue par cet intervalle de confiance est-elle meilleure que celle obtenue en 3.(c) ?

Solution :

1. cours : programme de seconde année p.19
2. Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(\overline{X_n}) = \dfrac{np}{n} = p$. Par indépendance, $\mathbb{V}(\overline{X_n}) = \dfrac{p(1-p)}{n}$.

   $\overline{X_n}$ est un estimateur sans biais de p car $\mathbb{E}(\overline{X_n}) = p$.

3. (a)

```
import numpy as np
import random as rd
def simulXbarre(n,p):
    S = 0
    for i in range(n):
        x = rd.random()
        if x < p:
            S += 1
    return S/n
```

(b) $\overline{X_n}$ est une variable d'espérance p et de variance $\dfrac{p(1-p)}{n}$ donc d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}(|\overline{X_n} - p)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$

Or $p(1-p) \leqslant \dfrac{1}{4}$ donc $\mathbb{P}(|\overline{X_n} - p)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{1}{4n\varepsilon^2}$.
Par ailleurs, $(|\overline{X_n} - p| > \varepsilon) \subset (|\overline{X_n} - p| \geqslant \varepsilon)$ donc par croissance de la probabilité :
$\mathbb{P}(|\overline{X_n} - p)| > \varepsilon) \leqslant \mathbb{P}(|\overline{X_n} - p)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{1}{4n\varepsilon^2}$.
Et par passage à l'événement contraire : $\mathbb{P}(|\overline{X_n} - p| \leqslant \varepsilon) \geqslant 1 - \dfrac{1}{4n\varepsilon^2}$, c'est à dire :

$$\mathbb{P}(p \in [\overline{X_n} - \varepsilon, \overline{X_n} + \varepsilon]) \geqslant 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

En prenant $\varepsilon = \sqrt{\dfrac{5}{n}}$ on obtient :

$$\mathbb{P}\left(p \in \left[\overline{X_n} - \sqrt{\frac{5}{n}}, \overline{X_n} + \sqrt{\frac{5}{n}}\right]\right) \geqslant 0,95$$

4. (a)

$$\begin{aligned}(\overline{X_n} - p \geqslant \varepsilon) &= (nt\overline{X_n} \geqslant nt(p+\varepsilon)) \qquad \text{car } nt > 0\\ &= (e^{nt\overline{X_n}} \geqslant e^{nt(p+\varepsilon)}) \qquad \text{car exp est bijective et croissante}\end{aligned}$$

Ainsi : $\mathbb{P}\left(\overline{X_n} - p \geqslant \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(e^{nt\overline{X_n}} \geqslant e^{nt(p+\varepsilon)}\right)$

(b) D'après le théorème de transfert $\mathbb{E}(e^{nt\overline{X_n}}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{nt\frac{k}{n}}\mathbb{P}(\overline{X_n} = \frac{k}{n}) = \sum_{k=0}^{n} e^{tk}\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = (q+pe^t)^n$

Ainsi $e^{nt\overline{X_n}}$ est une variable positive qui admet pour espérance $(q+pe^t)^n$, donc d'après l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}(e^{nt\overline{X_n}} \geqslant e^{nt(p+\varepsilon)}) \leqslant \frac{\mathbb{E}(e^{nt\overline{X_n}})}{e^{nt(p+\varepsilon)}}$$

et en utilisant 4.(a) :

$$\mathbb{P}\left(\overline{X_n} - p \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{(q+pe^t)^n}{e^{nt(p+\varepsilon)}}$$

c'est à dire :

$$\mathbb{P}\left(\overline{X_n} - p \geqslant \varepsilon\right) \leqslant e^{n\left(\ln(pe^t+q) - t(p+\varepsilon)\right)}$$

(c) Le trinôme du second degré $\dfrac{t^2}{8} - t\varepsilon$ atteint son minimum en $\dfrac{\varepsilon}{1/4} = 4\varepsilon$ et ce maximum vaut $-2\varepsilon^2$. Et par croissance de l'exponentielle, on obtient l'inégalité voulue.

5. $Y_n = 1 - X_n$ donc $(\overline{Y_n} - q \geqslant \varepsilon) = (1 - \overline{X_n} - (1-p) \geqslant \varepsilon) = (-(\overline{X_n} - p) \geqslant \varepsilon) = (\overline{X_n} - p \leqslant -\varepsilon)$
Donc $\mathbb{P}(\overline{X_n} - p \leqslant -\varepsilon) \leqslant e^{-2n\varepsilon^2}$
Comme $(|\overline{X_n} - p| \geqslant \varepsilon) = (\overline{X_n} - p \geqslant \varepsilon) \cup (\overline{X_n} - p \leqslant -\varepsilon)$ et l'union étant disjointe :

$$\mathbb{P}(|\overline{X_n} - p| \geqslant \varepsilon) = \mathbb{P}(\overline{X_n} - p \geqslant \varepsilon) + \mathbb{P}(\overline{X_n} - p \leqslant -\varepsilon)$$

Ainsi : $\mathbb{P}(|\overline{X_n} - p| \geqslant \varepsilon) \leqslant 2e^{-2n\varepsilon^2}$

6. On choisit ε vérifiant $1-2e^{-2n\varepsilon^2} \geqslant 0,95$.
   $\varepsilon = \sqrt{-\dfrac{\ln(0,0025)}{2n}}$ convient.
   Cet intervalle, tout comme celui de la question 3.(c) a une longueur de l'ordre de $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, il n'y a donc pas d'amélioration sensible.
   remarque : le premier intervalle est de longueur environ $\frac{4,5}{\sqrt{n}}$ alors que le second est $\frac{2,7}{\sqrt{n}}$, le second intervalle améliore donc un peu l'estimation

Exercice sans préparation Maths Appliquées 7

Soit la fonction Python `mystere(M,n)` prenant en entrée la matrice d'adjacence `M` d'un graphe non orienté et un entier naturel non nul `n` égal à son ordre (nombre de sommets). Les sommets sont les entiers naturels de 0 à $n-1$. La matrice `M` est représentée par un tableau `numpy` et l'accès à l'élément d'indice `i,j` est réalisé par `M[i,j]`

```
def mystere(M,n):
    i = 0
    j = 0
    while i < n and j < n:
        if i == j:
            i = i+1
        else:
            if M[i,j] == 1:
                j = j+1
                i = 0
            else:
                i = i+1
    return j
```

Que renvoie cette fonction ?

Solution :

Cette fonction recherche et renvoie, s'il existe, le premier indice `j` tel que la colonne de numéro `j` soit constituée de 0 sauf éventuellement à la position `j,j` et s'il n'existe pas de tel indice alors la valeur n est renvoyée.

Cette fonction recherche donc un sommet qui n'est relié à aucun autre sommet distinct (il peut en revanche être relié à lui-même, ou non) et renvoie ce sommet s'il existe, et sinon, elle renvoie la valeur n.

Question supplémentaire : on dit dans ce cas que le sommet est isolé. Écrire une fonction Python prenant en entrée la matrice d'adjacence d'un graphe à n sommets dont les sommets sont les entiers de 0 à $n-1$ et renvoyant le nombre de points isolés de ce graphe.

Corrigé de la question supplémentaire :

```
def compte(M,n):
    cpt = 0
    for j in range(n):
        i = 0
        while i < n and (M[i,j] == 0 or i == j):
            i = i+1
        if i == n:
            cpt = cpt + 1
    return cpt
```

SUJET Maths Appliquées 8

Exercice principal Maths Appliquées 8

1. Cours : donner les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ où $a \in \mathbb{R}$
2. On considère φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice représentative dans la base canonique est la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
   (a) Montrer que $\text{Sp}(A) = \{1, 3\}$ où $\text{Sp}(A)$ désigne le spectre de la matrice A. Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres de A et montrer que la famille obtenue par concaténation de ces bases n'est pas une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   On admet alors que la matrice A n'est pas diagonalisable.
   (b) On note $a_1 = (1, 1, 0)$, $a_2 = (0, 0, 1)$ et $a_3 = (1, -1, 0)$.
   Montrer que la famille $\mathcal{B} = (a_1, a_2, a_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice M de l'endomorphisme φ dans la base $\mathcal{B}$.
   (c) Déterminer une matrice carrée P telle que $A = PMP^{-1}$ (<u>le calcul de P^{-1} n'est pas demandé ici</u>)
3. On admet que $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
   Soient f, g et h trois fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} f'(t) &= 2f(t) + g(t) + h(t) \\ g'(t) &= f(t) + 2g(t) + h(t) \\ h'(t) &= 3h(t) \end{cases} \quad \text{et } f(0) = g(0) = h(0) = 1.$$
   (a) Déterminer l'expression de $h(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   (b) On note $X(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \\ h(t) \end{pmatrix}$ et $X'(t) = \begin{pmatrix} f'(t) \\ g'(t) \\ h'(t) \end{pmatrix}$.
   On note $Y(t) = P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$ et $Y'(t) = P^{-1}X'(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix}$.
   Montrer qu'on a : $\forall t \in \mathbb{R},\ u'(t) = 3u(t) + e^{3t}$.
   (c) En déduire l'expression de $u(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   <u>Indication :</u> on pourra chercher une solution particulière sous la forme $P(t)e^{3t}$ où P est un polynôme de degré 1.
   (d) Déterminer alors l'expression de $f(t)$ et $g(t)$ en fonction de t.

Solution :

1. Programme de première année, second semestre 3, p. 20.
   (a) Après échelonnement : $\text{rg}(A - \lambda I_3)$=rg$\begin{pmatrix} 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & (\lambda-1)(3-\lambda) & \lambda - 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$. On a donc Sp$(A)$=$\{1, 3\}$
   $E_1(A)$ =vect($\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$) et $E_3(A)$=vect($\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$)

La concaténation des bases des sous-espaces propres est la famille de deux vecteurs $\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$.

Cette famille est libre (cours) mais ne comporte que 2 vecteurs donc elle n'est pas une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ donc (admis dans l'énoncé car pas au programme) A n'est pas diagonalisable.

(b) On montre facilement la liberté, et comme la famille est composée de trois vecteurs, la famille $\mathcal{B}$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

On a alors $\varphi(a_1) = 3a_1$, $\varphi(a_2) = a_1 + 3a_2$ et $\varphi(a_3) = a_3$, d'où la matrice

$$M = \begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

(c) Par formule de changements de base, on obtient donc

$$P = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 0 & -1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

2. (a) h est la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 : $y' - 3y = 0$ vérifiant $y(0) = 1$ donc

$$\forall t \in \mathbb{R},\ h(t) = e^{3t}.$$

(b) On a $X'(t) = AX(t)$, et donc

$$Y'(t) = P^{-1}APY(t) = MY(t).$$

Ainsi $\begin{pmatrix}u'(t)\\v'(t)\\w'(t)\end{pmatrix} = M\begin{pmatrix}u(t)\\v(t)\\w(t)\end{pmatrix}$

Ainsi $u'(t) = 3u(t) + v(t)$

Comme $Y = P^{-1}X$, on a $v = h$ et comme $h(t) = e^{3t}$ on a bien : $\forall t \in \mathbb{R},\ u'(t) = 3u(t) + e^{3t}$.

(c) Les conditions initiales pour u, v et w se déduisent de celles pour f, g et h , en particulier $u(t) = \dfrac{1}{2}(f(t) + g(t))$, et donc $u(0) = 1$.

Une solution particulière est $t \mapsto te^{3t}$, ainsi, en tenant compte en outre de la condition initiale $u(0) = 1$, on trouve $u : t \mapsto (t+1)e^{3t}$

(d) On a pour tout t : $\begin{pmatrix}f(t)\\g(t)\\h(t)\end{pmatrix} = PY(t) = \begin{pmatrix}u(t) + w(t)\\u(t) - w(t)\\v(t)\end{pmatrix}$

On a $w'(t) = w(t)$, avec $w(0) = \dfrac{1}{2}(f(0) - g(0)) = 0$. Ainsi, on a $w = 0$, puis $f(t) = g(t) = u(t)$.

Exercice sans préparation Maths Appliquées 8

Une enfant possède deux paquets de n bonbons, un dans chaque poche. À chaque fois qu'elle veut manger un bonbon, elle choisit une poche au hasard et prend un bonbon du paquet correspondant. À un moment, elle essayera de piocher dans un des paquets de bonbons et réalisera qu'il est vide. On note X le nombre de bonbons restant dans l'autre paquet à ce moment-là. Déterminer la loi de X.

1. Ecrire le code d'une fonction Python `simuleX(n)` prenant l'entier n en argument et réalisant une simulation de la variable aléatoire X.
2. Déterminer la loi de X.

Solution :

1.

```python
import numpy.random as rd

def simuleX(n):
        X1,X2=n,n
        while X1*X2>0:
                x=rd.random()
                if x<1/2:
                        X1=X1-1
                else:
                        X2=X2-1
        return max(X1,X2)
```

2. Notons G_i l'événement « l'enfant choisit la poche de gauche à son i-ème choix ».
Remarquons que $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$. Par symétrie, on trouve que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = n-k) &= 2\mathbb{P}\left(G_{n+k} \cap \left[\bigcup_{\substack{J\subset[\![1,n+k-1]\!]\\ \mathrm{card}J=n-1}} \left(\bigcap_{j\in J} G_j\right) \cap \left(\bigcap_{j\in[\![1,n+k-1]\!]\setminus J} \overline{G_j}\right)\right]\right)\\ &= \sum_{\substack{J\subset[\![1,n+k-1]\!]\\ \mathrm{card}J=n-1}} \frac{1}{2^{n+k-1}} \quad \text{par disjonction et indépendances des tirages}\\ &= \frac{1}{2^{n+k-1}}\binom{n+k-1}{n-1}.\end{aligned}$$

Question supplémentaire : déterminer l'espérance de X.

Solution : Il suffit de calculer :

$$\begin{aligned}E(X) &= \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\mathbb{P}(X = n-k)\\ &= n - \sum_{k=0}^{n-1} k\mathbb{P}(X = n-k)\\ &= n - \sum_{k=0}^{n-1} k\frac{1}{2^{n+k-1}}\binom{n+k-1}{n-1}\\ &= n - \sum_{k=0}^{n-1} k\frac{1}{2^{n+k-1}}\binom{n+k-1}{k}\\ &= n - \sum_{k=0}^{n-1}(n+k-1)\frac{1}{2^{n+k-1}}\binom{n+k-2}{k-1}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E(X) &= n-\sum_{k=0}^{n-1}(n+k-1)\frac{1}{2^{n+k-1}}\binom{n+k-2}{n-1} \\
&= n\left(1-2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^{n+k-1}}\binom{n+k-2}{n-1}\right)+\sum_{k=0}^{n-1}(n-k+1)\frac{1}{2^{n+k-1}}\binom{n+k-2}{n-1} \\
&= n\left(1-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^{n+k-2}}\binom{n+k-2}{n-1}\right)+\sum_{k=1}^{n-1}(n-k+1)\frac{1}{2^{n+k-1}}\binom{n+k-2}{n-1} \\
&= n\left(1-2\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{2^{n+k-1}}\binom{n+k-1}{n-1}\right)+\sum_{k=0}^{n-2}(n-k)\frac{1}{2^{n+k}}\binom{n+k-1}{n-1} \\
&= n\mathbb{P}(X=1)+\frac{1}{2}\left(E(X)-\mathbb{P}(X=1)\right)
\end{aligned}
$$

d'où finalement $E(X)=(2n-1)\mathbb{P}(X=1)=(2n-1)\frac{1}{2^{2n-2}}\binom{2n-2}{n-1}$.

SUJET Maths Appliquées 9

Exercice principal Maths Appliquées 9

Soit α un réel positif ou nul. Soit f_α la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_\alpha(x) = x^3 + \alpha x - 1$$

1. Cours : donner la définition d'une fonction strictement décroissante sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'équation $f_\alpha(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$. On note $\varphi(\alpha)$ cette solution.

La fonction φ est ainsi la fonction qui à tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$ associe l'unique solution $\varphi(\alpha)$ sur $\mathbb{R}$ de l'équation $f_\alpha(x) = 0$.

3. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $0 < \varphi(\alpha) \leqslant 1$
4. En utilisant l'algorithme de dichotomie, écrire une fonction Python `dicho(alpha)` prenant en entrée un réel α positif ou nul et renvoyant une valeur approchée de $\varphi(\alpha)$ à 10^{-3} près.
5. Étudier les variations de φ sur $\mathbb{R}_+$. Déterminer $\varphi(0)$ et $\lim_{\alpha \to +\infty} \varphi(\alpha)$
6. Montrer que φ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $]0, 1]$ et déterminer sa bijection réciproque, puis justifier que φ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Solution :

1. Cours : programme de première année V.3 p. 14
2. f_α est une fonction polynômiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'_\alpha(x) = 3x^2 + \alpha$ est positive et éventuellement nulle en un point (lorsque $\alpha = 0$) en 0, donc f_α est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, f_α est également continue sur $\mathbb{R}$ et $f_\alpha(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $f_\alpha(x) = 0$ admet une unique solution $\varphi(\alpha)$ dans $\mathbb{R}$.
3. On a $-1 < 0 \leqslant \alpha$, c'est à dire $f_\alpha(0) < f_\alpha(\varphi(\alpha)) \leqslant f_\alpha(1)$, donc par stricte croissance de f_α on en déduit : $0 < \varphi(\alpha) \leqslant 1$
4. On commence par implémenter la fonction f_α.

```
def f(alpha,x):
    return x**3+alpha*x-1
```

Puis la dichotomie.

```
def dicho(alpha):
    a,b = 0,1
    while abs(b-a) > 10**(-3):
        m = (a+b)/2
        if f(alpha,a)*f(alpha,m) >0:
            a = m
        else:
            b = m
    return a
```

5. Montrons que φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
Soit α et β tels que $0 \leqslant \alpha < \beta$.
$f_\alpha(\varphi(\beta)) = \varphi(\beta)^3 + \alpha\varphi(\beta) - 1$
Or $\varphi(\beta)^3 - 1 = -\beta\varphi(\beta)$

Donc $f_\alpha(\varphi(\beta)) = (\alpha - \beta)\varphi(\beta) < 0 \qquad$ car $\alpha < \beta$ et $\varphi(\beta) > 0$ d'après 3.
Et comme $f_\alpha(\varphi(\alpha)) = 0$, on a $f_\alpha(\varphi(\beta)) - f_\alpha(\varphi(\alpha)) < 0$ et par croissance de f_α : $\varphi(\beta) < \varphi(\alpha)$
φ est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$
$\varphi(0) = 1$ car 1 est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $x^3 = 1$
φ étant décroissante et minorée par 0, d'après le théorème de la limite monotone φ admet une limite finie ℓ lorsque $\alpha \to +\infty$ et $\ell \geqslant 0$.
Si $\ell \neq 0$ alors $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \varphi(\alpha)^3 + \alpha\varphi(\alpha) = +\infty$ ce qui est contradictoire étant donné que $\varphi(\alpha)^3 + \alpha\varphi(\alpha) = 1$
Ainsi $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \varphi(\alpha) = 0$

<u>remarque : on peut ici faire une démonstration plus directe en remarquant que $\varphi(\alpha) = \frac{1-\varphi(\alpha)^3}{\alpha}$ et que le numérateur est borné</u>

6. φ étant strictement décroissante, elle est injective de $\mathbb{R}_+$ dans $]0,1]$
Soit $y \in]0,1]$: $y = \varphi(\alpha) \Leftrightarrow y^3 + \alpha y = 1 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{1-y^3}{y}$
Ainsi pour tout $y \in]0,1]$, $y = \varphi\left(\dfrac{1-y^3}{y}\right)$ et $\dfrac{1-y^3}{y} \in \mathbb{R}_+$
Donc φ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $]0,1]$ et $\varphi^{-1} : y \longmapsto \dfrac{1-y^3}{y}$. Cette application étant continue sur $]0,1]$ par quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, sa réciproque φ est également continue sur $\mathbb{R}_+$

Exercice sans préparation Maths Appliquées 9

Soit n un entier naturel non nul.

On choisit au hasard (et de manière équiprobable) une fonction σ parmi toutes les bijections de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.

On considérera que σ est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'ensemble des bijections de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.

On dit que $k \in [\![1,n]\!]$ est un **point fixe** de σ si $\sigma(k) = k$.

Quel est le nombre moyen de points fixes de σ ?

Solution :

Aide/questions intermédiaires :

- *Combien y a-t-il de bijections de $[\![1,n]\!]$ dans lui-même ?*
- *À quoi correspond la variable aléatoire* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{[\sigma(k)=k]}$?

On note X le nombre de points fixes de σ et on remarque que :

$$X = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{[\sigma(k)=k]}$$

Ainsi, par un argument de dénombrement, on trouve que :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\sigma(k) = k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{n!} = 1.$$

SUJET Maths Appliquées 10

Exercice principal Maths Appliquées 10

Soit n un entier naturel non nul.

On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}_n[x]$ par $f(P) = Q$ où $Q : x \mapsto P''(x) - 4xP'(x)$.

1. Cours : $\mathbb{R}_n[x]$?
2. On décide de représenter le polynôme nul par la liste vide et tout polynôme non nul $x \mapsto a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$ (où $a_k \neq 0$) par sa liste `[a_0, ..., a_k]` des coefficients dans l'ordre croissant des degrés.
   Écrire en `Python` une fonction `f` qui, à partir de la liste `coeff_P` des coefficients d'un polynôme P renvoie la liste des coefficients du polynôme $f(P)$.
3. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$ et déterminer sa matrice A dans la base canonique.
4. Montrer que A est diagonalisable. Quelle est la dimension de chacun de ses espaces propres ?
5. Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{R}_n[x]$ tel que $f(P) = \lambda P$. Montrer que $\lambda = -4\deg(P)$.
6. En déduire qu'il existe un unique polynôme H_n de degré n et de coefficient dominant 1 tel que $f(H_n) = -4nH_n$ puis montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $f(H_n') = -4(n-1)H_n'$.
7. En déduire les formules suivantes :

$$\forall n \geqslant 1,\ H_n' = nH_{n-1} \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ H_n(x) - xH_{n-1}(x) + \frac{n-1}{4}H_{n-2}(x) = 0.$$

Solution :

1. Cours : ECG2 Appli p. 6.
2.
```
def f(coeff_P):
    n = len(coeff_P)
    pseconde = []
    for k in range(2, n):
        pseconde.append(k*(k-1)*coeff_P[k])
    xp_prime = [0]
    for k in range(1, n):
       xp_prime.append(k*coeff_P[k])
    somme = []
    for k in range(n): # longueur de xp_prime
        if k < n-2:
            somme.append(pseconde[k] - 4*xp_prime[k])
        else:
            somme.append(-4*xp_prime[k])
    return somme
```
3. L'application est trivialement linéaire (l'opérateur de dérivation seconde est linéaire et la multiplication par x aussi).
   Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$. Il vient alors que $P'' \in \mathbb{R}_n[x]$ et $P' \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ puis que $xP' \in \mathbb{R}_n[x]$.
   On en déduit que $f(P) \in \mathbb{R}_n[x]$ et ainsi que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
   Puisque $f(1) = 0,\ f(x) = -4x$ et pour tout $k \in [\![2, n]\!],\ f\left(x^k\right) = k(k-1)x^{k-2} - 4kx^k$, la matrice de f dans

la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & & & & & \\ & -4 & 0 & 6 & & & (0) & \\ & & -8 & 0 & \ddots & & & \\ & & & -12 & \ddots & k(k-1) & & \\ & & & & \ddots & 0 & \ddots & \\ & & (0) & & & -4k & \ddots & n(n-1) \\ & & & & & & \ddots & 0 \\ & & & & & & & -4n \end{pmatrix}$$

4. La matrice A est triangulaire. Le spectre de A s'obtient donc par lecture des éléments diagonaux de la matrice. Puisque les coefficients de la diagonale sont deux-à-deux distincts, la matrice A admet $n+1$ valeurs propres distinctes (dans un espace de dimension $n+1$), elle est donc diagonalisable et la dimension de chacun de ses espaces propres est égale à 1.

5. Soit P un vecteur propre associé à une valeur propre λ. Ainsi $P'' - 4xP' = \lambda P$. Remarquons que P est un polynôme non nul et notons $a \neq 0$ le coefficient dominant de P. Le coefficient dominant de $P'' - 4xP$ est $-4a\deg(P)$ tandis que celui de λP est λa. Il vient donc immédiatement que $\lambda = -4\deg(P)$.

6. **Attention : la diagonalisation d'endomorphisme est hors-programme, il faut raisonner sur les matrices.**
Le réel $-4n$ est une valeur propre de A. Il existe donc un (et même une infinité de) vecteur propre X de A associé à $-4n$. D'après la question précédente, le dernier coefficient a de X est non nul (puisque $\deg(P) = n$).
Notons H_n le polynôme représenté par $\dfrac{1}{a}X$ dans la base canonique. Ce polynôme est bien de degré n, de coefficient dominant 1 et vérifie $f(H_n) = -4nH_n$.
L'unicité de ce polynôme est assurée par le fait que l'espace propre de A associé à la valeur propre $-4n$ est de dimension 1 : il ne peut exister dans cet espace deux vecteurs de dernier coefficient 1.
En dérivant l'égalité $f(H_n) = -4nH_n$, on trouve :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ H_n^{(3)}(x) - 4xH_n''(x) - 4H_n(x) = -4nH_n'(x) \quad \text{i.e.} \quad H_n^{(3)}(x) - 4xH_n''(x) = -4(n-1)H_n'(x).$$
On obtient alors : $f(H_n') = -4(n-1)H_n'$.

7. De la question précédente, on déduit que, pour tout $n \geqslant 1$, H_n' est un vecteur propre associé à la valeur propre $-4(n-1)$, tout comme le polynôme nH_{n-1}.
Puisque les espaces propres de f sont de dimension 1 et puisque H_n' et nH_{n-1} sont deux polynômes associées à la même valeur propre et puisqu'ils ont même coefficient dominant, ils sont égaux.
On en déduit que, pour tout $n \geqslant 2$, $H_n'' = nH_{n-1}' = n(n-1)H_{n-2}$.
Puisque $f(H_n) = -4nH_n$, on en déduit que :
$$\forall n \geqslant 2,\ n(n-1)H_{n-2} - 4nxH_{n-1} = -4nH_n \quad \text{i.e.} \quad H_n - xH_{n-1} + \frac{n-1}{4}H_{n-2} = 0.$$

Exercice sans préparation Maths Appliquées 10

Soient $\lambda > 0$ et $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et suivant toute la même loi de Poisson de paramètre λ. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$Y_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{X_k}.$$

Soit $\alpha \in]0,1[$. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer un intervalle de confiance asymptotique de $e^{-\lambda}$ au niveau $1-\alpha$ de la forme $[Y_n - \varepsilon, Y_n + \varepsilon]$, où ε est à déterminer en fonction de n et α.

Solution :

On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{S_n}$, où $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Comme les variables X_k sont indépendantes et suivent toutes une loi de Poisson de paramètre λ, la variable S_n suit une loi $\mathcal{P}(n\lambda)$.

Par théorème de transfert, Y_n admet une espérance si, et seulement si $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k} P(S_n = k)$ converge absolument.

Or : $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k} P(S_n = k) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k} \frac{(n\lambda)^k}{k!} e^{-n\lambda}$ est le terme général d'une série exponentielle convergente. Ainsi Y_n admet une espérance qui vaut : $\mathbb{E}(Y_n) = \mathrm{e}^{-\lambda}$.

De même, Y_n admet une variance si, et seulement si Y_n^2 admet une espérance. Il s'agit ici d'étudier la nature de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2k} P(S_n = k)$ dont le terme général est celui d'une série exponentielle.

Par calcul, on obtient : $\mathbb{E}(Y_n^2) = \mathrm{e}^{-n\lambda}\mathrm{e}^{(1-\frac{1}{n})^2 n\lambda} = \mathrm{e}^{-2\lambda + \frac{\lambda}{n}}$.

Finalement, Y_n admet une variance qui vaut, par formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}(Y_n) = \mathbb{E}(Y_n^2) - (\mathbb{E}(Y_n))^2 = \mathrm{e}^{-2\lambda + \frac{\lambda}{n}} - \mathrm{e}^{-2\lambda} = \mathrm{e}^{-2\lambda}\left(\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{n}} - 1\right).$$

Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à la variable aléatoire Y_n :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(\left|Y_n - \mathrm{e}^{-\lambda}\right| > \varepsilon) \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-2\lambda}\left(\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{n}} - 1\right)}{\varepsilon^2},$$

ce qui peut se récrire :

$$P(Y_n - \varepsilon \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda} \leqslant Y_n + \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{\mathrm{e}^{-2\lambda}\left(\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{n}} - 1\right)}{\varepsilon^2}.$$

Puis, quand n est grand, $\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{n}} - 1 \leqslant \frac{2\lambda}{n}$, donc

$$P\left(\mathrm{e}^{-\lambda} \in [Y_n - \varepsilon, Y_n + \varepsilon]\right) \geqslant 1 - \frac{2\lambda \mathrm{e}^{-2\lambda}}{n\varepsilon^2}.$$

Enfin, la fonction $x \mapsto x\mathrm{e}^{-x}$ définie sur $\mathbb{R}^+$ est à valeurs dans $[0, \mathrm{e}^{-1}]$, ce qui implique : $2\lambda\mathrm{e}^{-2\lambda} \leqslant \mathrm{e}^{-1}$, donc $P\left(\mathrm{e}^{-\lambda} \in [Y_n - \varepsilon, Y_n + \varepsilon]\right) \geqslant 1 - \frac{\mathrm{e}^{-1}}{n\varepsilon^2}$.

En prenant $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{n\ \mathrm{e}\ \alpha}}$, on justifie que $[Y_n - \varepsilon, Y_n + \varepsilon]$ est un intervalle de confiance de $\mathrm{e}^{-\lambda}$ au niveau $1-\alpha$.