

Rapport et exercices oraux HEC Aptitude logique

Juin 2024

Le bilan de la session 2024 de l'oral d'aptitude logique est satisfaisant.

Le niveau des candidats est très hétérogène : les notes se sont étalées entre 2 et 17 . La moyenne s'établit à 9,96 et l'écart-type à 4,26.

Certains candidats, capables de raisonnements fins et précis et dotés d'un solide bon sens quantitatif ont pu obtenir d'excellentes notes. Pour d'autres candidats en revanche, on note une absence totale de logique et des difficultés dans l'appréhension de données numériques.

Rappelons le format de l'épreuve.

- Le candidat se voit proposer un sujet à préparer pendant 30 minutes.
- Dans tous les cas le sujet comporte des questions de logique, de calcul et/ou de mathématiques élémentaires.
- Le sujet peut également contenir un texte ancien ou contemporain, avec un enjeu technique ou mathématique, et/ou un tableau statistique à interpréter. Dans ce cas, la première question consistera en un résumé bref et synthétique du document. Il s'agit alors d'insister sur l'aspect technique des enjeux soulevés, plutôt que sur les aspects historiques et descriptifs.
- Enfin le candidat se voit proposer des questions sans préparation lors des dix dernières minutes de passage.

Les pré-requis scolaires pour répondre aux questions ne dépassent pas ceux de la classe de seconde, il peut s'agir, par exemple, de règles de trois, de pourcentages, d'interprétations de graphique, de calcul élémentaires ou de dénombrement. Des questions de logique peuvent aussi être posées.

Pour réussir cette épreuve, les candidats sont invités à faire preuve de bon sens et à écouter les indications du jury. L'usage du tableau pour poser des calculs ou faire des graphiques est fortement recommandé.

Il est important de participer à la journée de l'oral ou, au moins, de la visionner. Elle répond aux questions de l'organisation et des attendus de chaque oral. Cela permet aux étudiants d'apprendre le déroulement d'un oral du point de vue des membres du jury.

Vous trouverez ensuite, à titre d'exemple, deux sujets proposés cette année avec leurs solutions.

SUJET Aptitude logique 1

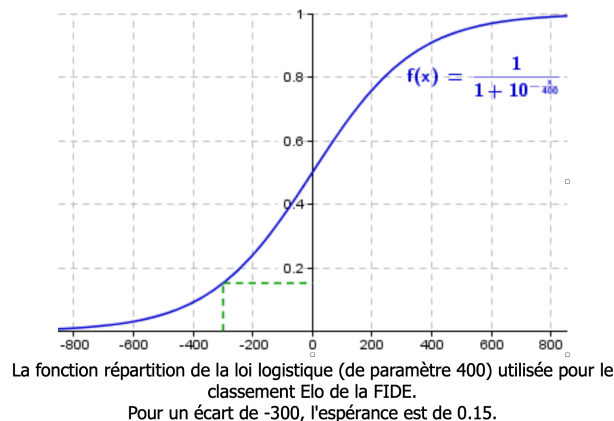
Exercice Aptitude logique 1

Afin de prédire le résultat d'un match sportif, on peut essayer d'établir un classement qui chiffre le niveau de l'ensemble des joueurs, et l'utiliser pour prédire le résultat d'une confrontation future. Un match entre deux joueurs de niveaux proches a une issue incertaine, celle d'un match entre le n°1 et le n°420 mondial l'est beaucoup moins. Tout le problème réside finalement dans le calcul du score des joueurs.

La plupart des fédérations sportives utilisent leur propre système de classement. Le tennis a son classement ATP, le football a son classement FIFA, le curling a son classement WCF. Tous ces classements ont un point commun : leur système de calcul possède beaucoup de points totalement arbitraires. Pourquoi une demi-finale de coupe Davis rapporte moins qu'un 16ème de finale à Wimbledon ? Pourquoi un match-nul en coupe du monde de football rapporte moins qu'une victoire en match amical ? Pourquoi une victoire aux JO en curling rapporte deux fois plus qu'une victoire en championnat ?...

Un système de classement sort du lot, le classement Elo, mis au point par le joueur d'échecs/mathématicien Arpad Elo qui ne supportait plus le classement utilisé par la fédération d'échecs américaine. Aux échecs, le nombre de points attribué par la FIDE (Fédération internationale des échecs) va de 1000 (pour les débutants) jusqu'à 2900. On considère qu'un excellent joueur a un classement de 2000. En 2013, seuls 6 joueurs ont dépassé les 2800 points. Le principe de base du classement Elo est d'attribuer un nombre de points à la hauteur du défi : si j'affronte un adversaire objectivement plus fort que moi et que je perds, mon classement ne diminuera pas beaucoup (et le sien montera peu). Par contre, si je gagne, ma victoire sera récompensée à la hauteur de l'exploit, et mon classement augmentera d'un grand nombre de points. La raison d'être du classement Elo est de fournir un moyen de prédire l'issue d'un match, ou du moins, de donner l'espérance de gain du challenger (0 : défaite ; 0.5 : match nul, 1 : victoire).

Si deux joueurs A et B ont respectivement un classement E_A et E_B , la probabilité de gain du joueur A sera donnée par $f(E_A - E_B)$, où f est une certaine fonction représentant une probabilité (dans le cas des échecs, on prend une fonction appelée fonction logistique). Concrètement, si A et B ont des classements proches, la probabilité de gain sera proche de 0.5 (un match nul) ; tandis que plus les classements sont éloignés, plus la probabilité de gain confortera le favori.



Exemple : Si un joueur amateur A ($E_A = 1400$) affronte un très bon joueur B ($E_B = 1700$), la probabilité de gain de A est de $f(1400 - 1700) = 0.15$. Autrement dit, notre joueur A a peu de chances de gagner... Mais si A gagne effectivement contre B, c'est que l'espérance - et donc le classement Elo des joueurs - ne coïncide pas exactement avec la réalité des faits : il faut les actualiser ! Une victoire augmente le classement Elo, la variation de points dépendant de la différence de niveau entre les joueurs : plus elle est importante, plus le challenger pourra gagner de points. Pour cela, on utilise la méthode incrémentale. À l'issue du match, le nombre de points du joueur A augmentera de :

$$K \times [S_A - f(E_A - E_B)]$$

où :

- S_A est le score de A lors du match (1 pour une victoire, 0.5 pour un match nul, 0 pour une défaite).
- K est le coefficient de développement. Plus K est grand, plus le classement évolue vite.

K est un coefficient qui dépend encore une fois de E_A et E_B . Plus précisément, K dépend de la moyenne des ELO des deux adversaires selon trois cas envisageables donnés par le tableau ci-dessous :

Moyenne des deux Elo	Expression de K
$\frac{E_A + E_B}{2} < 2000$	$K = 30$
$2000 < \frac{E_A + E_B}{2} < 2400$	$K = 130 - \frac{E_A + E_B}{20}$
$\frac{E_A + E_B}{2} > 2400$	$K = 10$

Reprenons l'exemple plus haut : $E_A = 1400$, $E_B = 1700$, $K = 30$ et $f(1400 - 1700) = 0.15$.

Après le match, la variation du classement de A sera :

- Si A gagne : $30 \times [1 - 0.15] = +25.50$.
- Si match nul : $30 \times [0.5 - 0.15] = +10.50$.
- Si A perd : $30 \times [0 - 0.15] = -4.50$.

Questions :

- Présenter et commenter les idées principales du texte ci-dessus.
- Compte-tenu de la modélisation proposée, justifier ces deux affirmations :
 - « Un joueur classé 2 850 Elo a autant de chance de battre un joueur classé 2 800 Elo, qu'un joueur classé 1 550 Elo a de chance de battre un joueur classé 1 500 Elo. »
 - « Le classement de B évoluera dans le sens opposé de celui de A et avec la même amplitude. » (On pourra penser à simplifier l'expression $f(x) + f(-x)$.)
- Calculer le pourcentage d'augmentation du classement d'un joueur dont le classement Elo passe de 1700 à 1800.
 - Quel sera le nouveau classement d'un joueur initialement classé à 2000 et dont le classement diminue de 3% ?
 - Le classement d'un joueur augmente de $t\%$ et diminue ensuite de $t\%$. Après ces deux variations, le nouveau classement augmente-t-il, diminue-t-il ou bien reste-t-il inchangé ?
- Dans cette question on se propose d'établir, par lecture graphique et par un calcul, les nouveaux classements de 2 joueurs A et B tels que $E_A = 2000$ et $E_B = 2400$ et dont le match s'est soldé par une victoire du joueur A.
 - Utiliser le graphique du texte pour donner une estimation des nouveaux classements des deux joueurs A et B.
 - On suppose que la fonction f est donnée par la relation

$$f(x) = \frac{1}{1 + 10^{-\frac{x}{400}}}$$

Calculer alors les nouveaux classements des deux joueurs A et B.

Solution :

- Exposé candidat.
- Cela résulte du fait que : $f(2850 - 2800) = f(1550 - 1500)$.
 - On remarque que $f(t) + f(-t) = 1$ (par symétrie de la courbe) Ainsi, en notant E'_A le nouveau classement de A :
 - si $S_A = 1$ ($S_B = 0$) :

$$E'_A - E_A = K(1 - f(E_A - E_B)) = Kf(E_B - E_A) = -K(0 - f(E_A - E_B)) = -(E'_B - E_B).$$

• si $S_A = S_B = 0.5$:

$$E'_A - E_A = K(0.5 - f(E_A - E_B)) = K(0.5 - (1 - f(E_B - E_A))) = -K(0.5 - f(E_B - E_A)) = -(E'_B - E_B).$$

• si $S_A = 0$ ($S_B = 1$) :

$$E'_A - E_A = K(0 - f(E_A - E_B)) = -K(1 - f(E_A - E_B)) = -(E'_B - E_B).$$

3. (a) $\frac{1800}{1700} \simeq 1,059$ soit une augmentation de 5,9%.

(b) $2000 \times 0.97 = 1940$.

(c) $\left(1 - \frac{t}{100}\right) \times \left(1 + \frac{t}{100}\right) = 1 - \frac{t^2}{10.000} < 1$: diminution.

4. (a) $2000 < \frac{E_A + E_B}{2} < 2400$ et donc $K = 130 - \frac{2200}{20} = 20$.
Par lecture graphique : $f(2000 - 2400) = f(-400) \simeq 0.1$

Si A gagne alors $S_A = 1$ et $E'_A - E_A = 20(1 - 0.1) = 18$.

On aura donc :

$$E'_A = 2018 \quad \text{et} \quad E'_B = 2382$$

(b) $f(-400) = \frac{1}{1 + 10^1} = \frac{1}{11}$.

On obtient :

$$E'_A - E_A = 20\left(1 - \frac{1}{11}\right) = \frac{200}{11} \simeq 18,18$$

Exercice sans préparation Aptitude logique 1

On regarde une montre à aiguilles.

- (a) Combien il y a-t-il de différents instants entre minuit et midi où la grande et la petite aiguilles sont superposées ?
(b) Préciser les 2 premiers instants où cela arrive.
 - Est-il possible que la grande aiguille, la petite aiguille et la trotteuse soient superposées ?
-

Solution :

- (a) Il y en a 12.
(b) Le 1er à $t = 0h$ et le deuxième à $t = 12/11h = 1h5'27''$.
- Soit t_n l'instant (en heures) de la n -ème superposition de la petite et de la grande aiguille. On a :

$$t_n = (n-1) \frac{12}{11}$$

A l'instant t_n la grande aiguille aura effectué t_n tours et la trotteuse en aura effectué 60 fois plus. Ainsi, la trotteuse et la grande aiguille occupent la même position si et seulement si :

$$60t_n - t_n \in \mathbb{Z}$$

soit :

$$59t_n = (n-1) \frac{59 \times 12}{11} \in \mathbb{Z}$$

avec $1 \leq n \leq 12$.

Cela n'advient que si $n = 1$ ou $n = 12$ du fait que 11 est premier et ne divise ni 59 ni 12...

Bilan : la trotteuse ne peut se superposer avec les autres qu'à midi et minuit !

SUJET Aptitude logique 2

Exercice Aptitude logique 2

Une société de vente veut comparer trois de ses démarcheurs en réalisant une campagne de démarchage sur un certain nombre de personnes :

- 300 personnes ont été visitées par le démarcheur Michel
- 900 personnes ont été visitées par le démarcheur Claude soit 45% des personnes démarchées au total dans cette campagne
- les autres ont été visitées par le démarcheur Thomas et en outre toutes les personnes démarchées sont distinctes.

On a constaté que :

- 5% des personnes ayant été visitées par Michel ont acheté le produit
- 10% des personnes ayant été visitées par Claude ont acheté le produit
- 20% des personnes ayant été visitées par Thomas ont acheté le produit.

Pour simplifier les notations on pourra noter les événements :

M : « a été visité par Michel »

C : « a été visité par Claude »

T : « a été visité par Thomas »

A : « a acheté le produit »

$\bar{A}$ l'événement contraire de A.

(Si le candidat le juge utile il pourra s'aider d'un arbre résumant l'énoncé)

On exprimera les proportions en pourcentages, arrondis à 0,01 près si nécessaire.

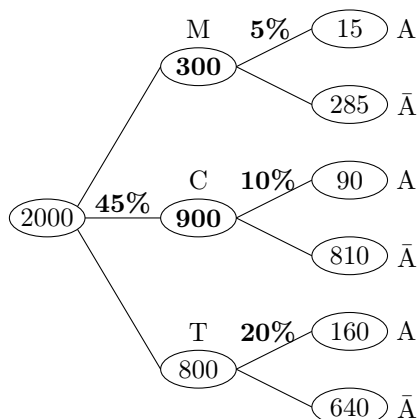
1. Cette campagne a permis à combien de personnes d'être visitées en tout ?
2. Calculer la proportion des personnes visitées par Michel et qui ont acheté le produit.
3. Calculer la proportion des personnes qui ont acheté le produit.
4. Calculer la proportion des personnes qui ont été visitées par Michel ou ont acheté le produit.
5. Quelle est la proportion de ceux qui n'ont pas acheté le produit ?
6. Calculer la proportion de ceux qui ont acheté le produit alors qu'ils avaient été visités par Michel.
7. Déterminer la proportion de ceux qui ont été visités par Michel sachant qu'ils ont acheté le produit.
8. Soit une personne qui n'a pas acheté le produit ; par lequel des trois démarcheurs cette personne a-t-elle le plus probablement été visitée ?
9. Lequel des trois démarcheurs paraît le plus efficace pour la vente ?

Solution :

1. Il y a eu en tout 2000 personnes visitées par les démarcheurs car $\frac{900}{0,45} = 2000$.

Arbre

On s'aide d'un arbre pour déduire, à partir des autres effectifs et des pourcentages, les divers effectifs partiels :



2. $\frac{15}{2000} = 0,75\%$ des personnes ont été visitées par Michel et ont acheté le produit.
3. $\frac{265}{2000} = 13,25\%$
4. $prop(M \cup A) = prop(M) + prop(A) - prop(M \cap A) = 15\% + 13,25\% - 0,75\% = 27,5\%$
5. $p(\bar{A}) = 100\% - p(A) = 100\% - 13,25\% = 86,75\%$ ou bien $\frac{1735}{2000} = 86,75\%$ des personnes n'ont pas acheté le produit.
6. 5% d'après l'énoncé.
7. $\frac{15}{265} \simeq 5,66\%$
8. nombre de personnes n'ayant pas acheté qui ont été visitées par Michel : 285
" " " " " " Claude : 810
" " " " " " Thomas : 640

Si on prend au hasard une parmi les $285+810+640=1735$ personnes n'ayant pas acheté le produit, le plus probable est de tomber dans le plus grand sous-ensemble : les 810 personnes visitées par Claude.

9. Thomas car 20% de ceux qui ont été visités par Thomas ont acheté, contre 5% par Michel et 10% par Claude.

Exercice sans préparation Aptitude logique 2

1. Une propriété a un local des vannes qui dispose de 3 vannes X, Y, Z qui fournissent l'eau à la Maison, au Jardin et à l'Ecurie. Combien y a-t-il de possibilités de répartitions ?
2. Un ami vous a prêté sa maison de vacances. Il vous dit : « J'ai arrêté l'eau, mais tu trouveras dans le local des vannes trois vannes (A, B et C), côte à côte. Une seule alimente la maison, je ne sais plus laquelle. » Comment pouvez-vous vous y prendre pour savoir quelle est la vanne d'alimentation de la maison en ne passant qu'une seule fois au local des vannes ?

Solution :

1. Il y a 6 répartitions possibles : il y a 3 possibilités pour X puis 2 pour Y et 1 pour Z (les bijections de $\{X, Y, Z\}$ sur $\{M, J, E\}$).
2. Vous pouvez d'abord mettre un récipient vide sous le robinet de la cuisine, puis ouvrir ce robinet.
Il faut ensuite aller au local des vannes.
Là, vous ouvrez une des vannes, par exemple, la vanne A. Vous la refermez après quelques secondes.
Vous ouvrez ensuite une deuxième vanne, la B, que vous ne refermez pas et vous revenez dans la cuisine.
Vous regardez maintenant le robinet que vous avez ouvert.
Si l'eau coule, la vanne d'alimentation est la B.
Si l'eau ne coule pas, mais qu'il y a de l'eau dans le récipient, la vanne d'alimentation est la A.
Si l'eau ne coule pas et qu'il n'y a pas d'eau dans le récipient, la vanne d'alimentation de la maison est la C.