Rapport et exercices oraux HEC Aptitude logique

Juin 2023

Le bilan de la session 2023 de l'oral d'aptitude logique est satisfaisant.

Le niveau des candidats est très hétérogène : les notes se sont étalées entre 1 et 19 . La moyenne s'établit à 10,91 et l'écart-type à 4,93.

Certains candidats, capables de raisonnements fins et précis et dotés d'un solide bon sens quantitatif ont pu obtenir d'excellentes notes. Pour d'autres candidats en revanche, on note une absence totale de logique et des difficultés dans l'appréhension de données numériques.

Rappelons le format de l'épreuve.

- Le candidat se voit proposer un sujet à préparer pendant 30 minutes.
- Dans tous les cas le sujet comporte des questions de logique, de calcul et/ou de mathématiques élémentaires.
- Le sujet peut également contenir un texte ancien ou contemporain, avec un enjeu technique ou mathématique, et/ou un tableau statistique à interpréter. Dans ce cas, la première question consistera en un résumé bref et synthétique du document. Il s'agit alors d'insister sur l'aspect technique des enjeux soulevés, plutôt que sur les aspects historiques et descriptifs.
- Enfin le candidat se voit proposer des questions sans préparation lors des dix dernières minutes de passage.

Les pré-requis scolaires pour répondre aux questions ne dépassent pas ceux de la classe de seconde, il peut s'agir, par exemple, de règles de trois, de pourcentages, d'interprétations de graphique, de calcul élémentaires ou de dénombrement. Des questions de logique peuvent aussi être posées.

Pour réussir cette épreuve, les candidats sont invités à faire preuve de bon sens et à écouter les indications du jury. L'usage du tableau pour poser des calculs ou faire des graphiques est fortement recommandé.

Il est important de participer à la journée de l'oral ou, au moins, de la visionner. Elle répond aux questions de l'organisation et des attendus de chaque oral. Cela permet aux étudiants d'apprendre le déroulement d'un oral du point de vue des membres du jury.

Vous trouverez ensuite, à titre d'exemple, deux sujets proposés cette année avec leurs solutions.

Aptitude logique, sujet n°1, exercice principal

Le tableau suivant permet d'étudier le nombre de boites vendues, le prix et les sommes remboursées aux assurés par la sécurité sociale de 3 médicaments : le médicament A, le médicament B et le médicament C.

Les données ont été calculées sur deux périodes distinctes : l'hiver (décembre 2022-mars 2023) et le printemps (avril-mai 2023).

	Hiver (déc 2022-mars 2023)			Printemps(avril-mai 2023)		
	NB	PV	SR	NB	PV	SR
Médicament A	150	12	1350	200	15	1800
Médicament B	200	10	1300	100	10	660
Médicament C	250	5	1010	200	5	803

NB : nombre de boîtes vendues (en milliers)
PV: prix de vente à l'unité (en euros)
SR : somme totale remboursée pour ce médicament par la sécurité sociale (en milliers d'euros)

1. Dans cette question on étudie uniquement les données de l'hiver.
   (a) Combien d'argent la sécurité sociale a-t-elle dépensé au cours de l'hiver sur ces trois médicaments?
   (b) Combien les assurés ont-ils dépensé sur le médicament A ?
   (c) Calculer, pour chacun des trois médicaments (à 1% près) le taux de remboursement effectif (ie le pourcentage de la somme payée pour le médicament qui a été remboursée aux assurés). On notera le résultat obtenu, qui sera utile pour la suite.
   (d) Sans calcul, à votre avis le taux de remboursement effectif global des 3 médicaments vaut-il a) 62% b) 72% c) 79% ou d) 82% ?
   (e) Combien cela aurait-il coûté en plus à la sécurité sociale de passer cet hiver à un système de tiers-payant où les assurés ne payent pas les médicaments (ou sont intégralement remboursés)?
2. Dans cette question, on étudie toujours les données de l'hiver. Pour être remboursés, les assurés doivent envoyer leur feuille de soin. Certains oublient, et ne sont alors pas remboursés.
   (a) Le médicament C : les assurés ayant envoyé leur feuille de soin sont intégralement remboursés de leur dépense. Quel pourcentage d'assurés a oublié d'envoyer la feuille ?
   (b) Le médicament B : les assurés ayant envoyé leur feuille de soin sont remboursés de 75% de leur dépense. Quel pourcentage d'assurés a oublié d'envoyer la feuille ?
   (c) Le médicament A : selon leur âge, les assurés ayant envoyé leur feuille de soin sont remboursés 80% ou 90%. Que peut-on dire du pourcentage d'assurés ayant oublié d'envoyer la feuille ?
3. On compare maintenant les données de l'hiver à celle du printemps.
   (a) Les médicaments A, B et C servent à guérir trois maladies distinctes (maladie A, maladie B, maladie C). On admet que la consommation de chaque médicament permet de suivre le nombre de malades de chaque maladie. Ces maladies sont-elles sujettes à des variations saisonnières ?
   (b) Quelles autres évolutions décelez-vous dans ce tableau ?

Solution :

1. (a) $\boxed{3660}$
   (b) $150 \times 12 \boxed{= 1800}$
   (c) Médicament A : $\frac{1350}{1800} = \frac{27}{36} = \frac{3}{4} \boxed{= 75\%}$
   Médicament B : $\frac{1300}{2000} = \frac{130}{200} \boxed{= 65\%}$
   Médicament C : $\frac{1010}{1250}$ il faut poser la division (à moins qu'ils ne pensent à faire $*8$, mais bon). On arrive à 80 ou 81%. L'arrondi le plus pertinent donne $\boxed{81\%}$

(d) La réponse se trouve entre 65 et 81%.79% ne semble pas plausible (le médicament C pèse pour moins d'un tiers dans la moyenne) La bonne réponse est $\boxed{72\ \%}$

(e) Les assurés ont dépensé $1800 + 2000 + 1250 = 5050$. La sécu a dépensé 3660 , la dépense va augmenter de $5050 - 3660 \boxed{= 1390}$ (il y aura peut-être des économies de gestion, mais ce n'est pas la question)

2. (a) Le taux de remboursement est de 81%, donc (environ) $\boxed{19\%}$ des assurés ont oublié d'envoyer leur feuille.

   (b) Si tout le monde était remboursé, on aurait 75% de la dépense remboursée. Or, seuls 65% de la dépense ont été remboursés. Donc 10% de la dépense n'a pas été remboursée.
   Donc une proportion de $\frac{10}{75}$ des assurés n'a pas envoyé sa feuille de soin, ce qui donne en pourcentage

$$\frac{10 * 100}{75} = \frac{10 * 4}{3} = \frac{40}{3} \boxed{\approx 13\%}$$

   On peut aussi voir que diviser par 75% c'est multiplier par $\frac{4}{3}$

   (c) On peut donner un encadrement (plus le taux de remboursement est élevé, plus on doit avoir un "taux d'oubli" nécessaire pour arriver à un taux de remboursement effectif de 65%.) Autrement dit, le taux d'oubli est croissant en fonction du taux de remboursement théorique à taux de remboursement effectif fixé. Donc si tous les assurés étaient remboursés à 80%, le taux d'oubli serait de $\frac{15}{80}$ soit un pourcentage d'un peu plus que 18%. Donc si tous les assurés étaient remboursés à 90%, le taux d'oubli serait de $\frac{25}{90}$ soit un pourcentage d'un peu moins que 38%. Le taux d'oubli est $\boxed{\text{compris entre 18\% et 38\%.}}$

3. (a) La durée de la période dite de printemps est deux fois plus courte que celle de l'hiver. Donc le nombre de boîtes vendues devraient être divisée par deux. C'est (à peu près) le cas pour le médicament B. les maladies $\boxed{\text{A et C sont plutôt des maladies printanières}}$ On peut ajouter qu'il faut être prudent : d'autres facteurs conjoncturels peuvent entrer en ligne de compte.

   (b) On peut voir que $\boxed{\text{le taux de remboursement du médicament A a fortement baissé}}$ (passage de 75% à $\frac{1800}{3000} = 60\%$)

Aptitude logique, sujet n°1, exercice sans préparation

1. (a) On se donne 5 points à coordonnées entières A,B,C,D et E dans le plan muni d'un repère. Montrer qu'il existe au moins un segment d'extrémité deux de ces 5 points qui contient au moins un point à coordonnées entières.

   (b) Est-ce encore vrai avec 4 points seulement ?

2. Une colonie de 100 fourmis tombe sur un morceau de branche de longueur 1 m et se met alors en mouvement; certaines fourmis partent vers la gauche, les autres vers la droite toutes à la même vitesse de 1 cm/s

   Lorsque deux fourmis se retrouvent nez-à-nez, elles rebondissent comme deux billes de billard et repartent en sens opposé : celle qui marchait initialement vers la droite (resp. gauche) se retrouve à marcher vers la gauche (resp. droite).

   Question : Combien de temps faudra-t-il au maximum pour que toute la colonie de fourmis chute de la branche?

Solution :

1. (a) pour les coordonnées des points il y a 4 types: (pair,pair)ou (pair,impair) ou (impair,pair) ou (impair,impair).

   Donc si il y a 5 points il y en a au moins deux qui sont du même type. Donc le milieu est à coordonnées entières.

   (b) ça ne marche plus . Prendre (0,0) et (0,1) et (1,1) et (1,0) par exemple...

2. La réponse à l'énigme devient évidente si on a l'idée de cligner des yeux à chaque fois que deux fourmis se retrouvent nez-à-nez. En effet, si on cligne des yeux pendant les quelques instants où deux fourmis rebondissent l'une sur l'autre, lorsqu'on rouvre les yeux, il est impossible de savoir ce qu'il s'est réellement passé... Les deux fourmis ont pu rebondir l'une sur l'autre comme c'était la règle mais nos fourmis imaginaires ont tout aussi bien pu passer l'une au travers de l'autre et ainsi continuer leurs trajectoires comme si de rien n'était.

   Bilan :

   Le temps mis par la colonie de fourmis pour chuter de la branche est au plus égal au temps mis par une seule fourmi pour parcourir toute la branche soit au plus 100 secondes.

Aptitude logique, sujet n°4, exercice principal

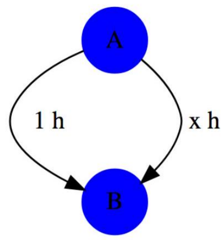
Présenter et commenter <u>brièvement</u> ce texte puis répondez aux questions de l'exercice posé à la fin du document.

Extrait du texte «Le prix-de-l'anarchie » par Etienne Ghys.

En 1990, à l'occasion de la « journée de la Terre », la municipalité de New York décida de fermer la 42-ème rue à la circulation. Cette rue étant l'une des plus animées de Manhattan, on pensait que cette fermeture ne manquerait pas de ralentir la circulation et de provoquer des embouteillages supplémentaires. C'est le contraire qui se passa : le fait de fermer la 42-ème rue rendit la circulation plus fluide ! C'était l'une des premières fois où l'on voyait se réaliser «en vrai » un phénomène mis en évidence de manière théorique en 1968 par un universitaire allemand : le paradoxe de Braess.

Deux paradoxes :

Pour expliquer cela, nous allons commencer par décrire un autre phénomène découvert par A.C. Pigou - un économiste - en 1920. Supposons que deux villes A et B, de part et d'autre d'un fleuve, soient reliées par deux routes. La première est excellente, très large, mais elle fait malheureusement un grand détour : il faut une heure pour la parcourir, et ceci quel que soit le nombre de véhicules qui l'empruntent (dans des limites raisonnables, par exemple jusqu'à 1000 véhicules par heure). La seconde passe par un pont très étroit et très court, et on peut le parcourir en quelques instants à peine, à condition d'être seul sur le pont. Mais plus le nombre de personnes qui empruntent le pont augmente, plus la circulation devient encombrée, et plus le temps de passage augmente. Pour faire simple, supposons que si x milliers d'automobilistes/heure se présentent sur le pont, le temps de passage est de x heures. Par exemple, pour 300 véhicules/heure, c'est-à-dire 0,3 milliers/heure, le temps de passage est de 0,3 heures, c'est-à-dire 18 minutes.



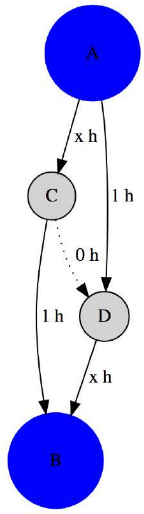
Supposons maintenant que 1000 automobilistes/heure souhaitent aller de A à B. On peut envisager deux scénarios différents.

1. Le comportement égoïste. Chaque automobiliste choisit sa route comme il le souhaite. Ici, c'est clair : comme de toutes façons moins de 1000 véhicules/heure passent par le pont, on met moins d'une heure pour traverser le pont, et il est donc toujours préférable de prendre le pont plutôt que la route longue. Tout le monde optera pour le pont si bien que tout le monde mettra une heure pour aller de A à B.

2. Le comportement social. La municipalité, ou la police, peut forcer certains automobilistes à prendre telle ou telle route, par exemple en fermant une barrière temporairement sur le pont. Supposons par exemple qu'on force la moitié des 1000 véhicules/ heure à prendre la route longue. Alors, 500 véhicules/heure mettront une heure pour parcourir la route longue mais les 500 autres prendront le pont et ne mettront que 30 minutes ! Le temps moyen de passage entre A et B, dans cette option « policière », est donc de 45 minutes.

C'est la remarque de Pigou : un système de communication régulé de manière "centralisée ", imposant des comportements à certains individus, peut circuler beaucoup mieux qu'un système dans lequel chacun peut choisir son comportement comme bon lui semble. L'«optimum social » est (parfois) bien meilleur que l'«optimum libéral ». Pas vraiment une surprise. L'union fait la force...

Passons au paradoxe de Braess illustré sur la figure suivante :



Deux routes joignent A et B. L'une passe par un point C et l'autre par un point D. Les tronçons AD et CB sont de bonne qualité mais longs : il faut une heure pour les parcourir. Les tronçons DB et AC sont comme le pont de Pigou : s'ils sont parcourus par x milliers de véhicules/heure, il faut x heures pour les parcourir. S'il y a 1000 véhicules/heure qui se présentent en A et qui souhaitent aller en B, la symétrie des deux routes montre que les automobilistes vont choisir les deux routes à égalité et que tout le monde mettra une heure plus une demi-heure pour aller de A à B. Supposons maintenant que la municipalité décide d'améliorer la circulation en créant un nouveau tronçon hyper-rapide qui connecte C et D, tellement rapide que le temps mis pour le parcourir est négligeable, quel que soit le nombre de véhicules. Observons maintenant le comportement égoïste. Puisque nous savons qu'il y a 1000 véhicules/heure sur les routes, les tronçons DB et AC sont toujours plus rapides que AD et CB. Un automobiliste partant de A préférera toujours AC à AD et, une fois arrivé en C, il préférera utiliser la nouvelle route CD puis DB plutôt que d'emprunter CB. Tous les automobilistes auront le désir de prendre le chemin $AC - CD - DB$ et puisque tous s'engouffrent sur le même chemin, ils vont tous mettre un temps égal à une heure plus une heure, soit deux heures pour aller de A à B.

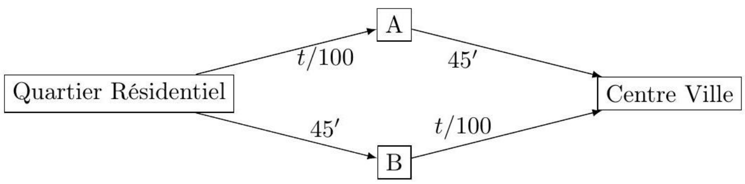
La municipalité, voulant arranger les choses en créant un nouveau tronçon, a en fait tout compliqué. Il fallait une heure trente pour aller de A à B, et il faut maintenant deux heures...

On peut renverser l'argument. Si le réseau initial contient le passage CD, et si on décide de le fermer, comme pour la 42 ème rue, la situation s'améliore et tout le monde gagne une demi-heure. C'est le paradoxe de Braess, mis en évidence en 1968. Il faut bien noter que ce paradoxe suppose un comportement égoïste : il n'aurait bien sûr pas lieu avec un comportement social.

Exercice

4000 habitants d'un quartier résidentiel prennent tous les matins leur voiture pour aller travailler en centre-ville. Deux itinéraires disjoints passant respectivement par A et B, sont formés chacun de deux tronçons comme indiqués sur la figure ci-dessous : un tronçon d'une durée de 45 minutes et un tronçon sensible au trafic où la durée de traversée (en minutes) est égale au nombre de véhicules t qui choisissent ce tronçon divisé par 100 (noté $t/100$ sur la figure).

Ainsi, par exemple, si 1000 véhicules empruntent ce tronçon la traversée de celui-ci sera de 1000/100=10 minutes.



1. Supposons que 2000 automobiliste choisissent le trajet passant par A et les 2000 autres celui passant par B. Quel est le temps de parcours de chaque trajet?

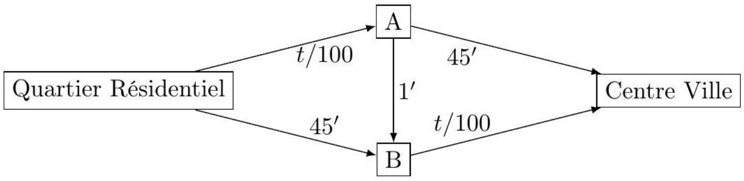
2. Sur un site d'information rendant compte de l'utilisation journalière des tronçons, chaque automobiliste regarde s'il n'aurait pas pu prendre un itinéraire plus rapide (avec l'hypothèse que tous les autres automobilistes ne changent pas le leur). S'il existe une telle amélioration, il calcule le chemin le plus rapide pour lui et le lendemain matin il le prend.

   Supposons que le premier jour a (resp. b) habitants ont choisi l'itinéraire passant par A (resp. B).

Comment le trafic va-t-il évoluer au fil des jours?

On pourra montrer que lorsque $a = b = 2000$ le trafic est en situation d'"équilibre".

3. Pour diminuer les temps de transport, le maire de la ville a décidé d'améliorer les infrastructures routières en construisant une voie rapide de A vers B sur laquelle le temps de traversée est de seulement 1 minute.



Notons a le nombre de personnes empruntant un certain jour l'ancien itinéraire passant par A, b le nombre de celles empruntant l'ancien itinéraire passant par B, et c le nombre de celles qui empruntent le nouvel itinéraire, passant par A puis B via la nouvelle route (avec $a + b + c = 4000$).

Soient T_A, T_B et T_C les durées de ces trois trajets.

Exprimer T_A, T_B et T_C en fonction de a, b et c et montrer que :

$$T_C < T_A \quad \text{et} \quad T_C < T_B$$

4. Comparez le temps de trajet des automobilistes effectifs dans les deux situations (avec ou sans possibilité de prendre la voie rapide) après stabilisation des comportements.

Solution :

1. Soit T_A (resp. T_B) le temps de trajet passant pas A(resp. par B).

On a :

$$T_A = 2000/100 + 45 = 65 \text{ minutes}$$

De même :

$$T_B = 45 + 2000/100 = 65 \text{ minutes}$$

2. La question est difficile et met en oeuvre des considérations de type "équilibre de Nash"...

Si $a < b$, les automobilistes passés par A voudront changer de route mais pas ceux passés par B ; ainsi le deuxième jour les $a + b = 4000$ automobilistes emprunteront la route passant par B ; et ensuite le trafic sera de période 2, avec tous les habitants choisissant alternativement la route A (les jours impairs) et la route B (les jours pairs).

Le cas $a > b$ est symétrique.

Enfin, si $a = b = 2000$, aucun automobiliste n'aura intérêt à changer de route, et le trafic restera inchangé (en "équilibre").

3. On a :

$T_A = \frac{a+c}{100} + 45$

$T_B = 45 + \frac{b+c}{100}$.

$T_C = \frac{a+c}{100} + \frac{b+c}{100} + 1$

Or, quels que soient a, b et c, on a $\frac{a+c}{100} < 40$ et $\frac{b+c}{100} < 40$. Il s'ensuit que : $T_C < T_A$ et $T_C < T_B$.

Inévitablement, le lendemain, tous les automobilistes choisiront la nouvelle route, et le trafic se stabilisera ainsi.

4. On a donc finalement, après stabilisation, (en notant T_c le nouveau temps de trajet) : $T_c = \frac{4000}{100} + \frac{4000}{100} + 1 = 81$ minutes, alors que dans l'équilibre de la situation sans voie rapide le temps de trajet de chaque automobiliste était de seulement $\frac{2000}{100} + 45 = 65$ minutes.

La fermeture de la voie rapide a donc pour effet de diminuer le temps de trajet...! (relativement au temps de trajet de la situation d'équilibre)

Aptitude logique, sujet n°4, exercice sans préparation

1. Vous disposez de 9 billes de même apparence mais une seule d'entre elles est plus lourde que les 8 autre qui sont de même masse. Vous disposez aussi d'une balance à 2 plateaux (connue sous le nom de balance de Roberval).

   Est-il possible de réussir à déterminer la bille plus lourde en deux pesées seulement?

2. 4 moniteurs et 45 colons doivent traverser la rivière de la rive A à la rive B. Ils louent pour cela un canoë qui ne peut contenir que deux moniteurs ou trois colons ou un moniteur et un colon à un loueur situé sur la rive A. Sachant qu'un aller-retour compte pour 2 traversées et qu'une traversée dure 5 minutes et 13 secondes :

   (a) Combien de temps (en heures, minutes, secondes) au minimum est nécessaire pour faire passer tout le monde si le loueur exige que le canoë soit rendu sur la rive A ?

   (b) Combien de temps (en heures, minutes, secondes) au minimum est nécessaire pour faire passer tout le monde si le loueur accepte que le canoë soit laissé sur la rive B ?

Solution :

1. On fait 3 tas de trois billes. On choisit 2 tas que l'on place sur la balance.

   1er cas : si la balance est en équilibre c'est que la bille la plus lourde est dans le tas qui n'est pas sur la balance.

   2e cas : la balance penche d'un côté, la bille la plus lourde est du côté le plus lourd. Dans les deux cas, la bille a été identifiée dans un tas de 3 billes. 2- À partir de ces 3 billes, on en choisit 2 que l'on place sur la balance. 1er cas : si la balance est en équilibre, la bille la plus lourde est sur le côté. 2e cas : si la balance penche d'un côté, la bille la plus lourde est de ce côté.

2. (a) C'est impossible puisqu'il faut un moniteur ou un colon pour ramener le canoé sur la rive A, donc cette personne est sur la rive A !

   (b) Il faut effectuer un aller-retour pour qu'un moniteur change de rive et que le canoë revienne sur la rive de départ. On effectue cette opération 4 fois (le moniteur est accompagné indifférement par un colon ou un moniteur)

   Puis, on fait 21 allers retours, on a posé 42 colons et il en restent 3 sur la rive A Et enfin les trois derniers colons traversent en un aller simple.

   On a donc effectué 51 traversées, soit 255 minutes $+663$ secondes $=266$ minutes $+3$ secondes $=4$ h26 minutes et 3 secondes.