Rapport et exercices oraux HEC Mathématiques BL

Juin 2023

Le bilan de la session 2023 de mathématiques voie BL est satisfaisant.

Cette année les notes se sont étalées entre 4 et 19. La moyenne s'établit à 11,08 et l'écart-type à 4,05.

Le jury a fortement apprécié les qualités d'expression et la finesse de raisonnement de certains candidats qui ont fait forte impression.

A contrario, certains candidats se sont révélés approximatifs, au niveau du calcul, mais surtout au niveau de la connaissance des théorèmes du cours.

Le jury aimerait insister sur les points suivants :

- La question de cours n'est pas à négliger. Il faut y répondre précisément.
- Le jury a parfois rencontré des erreurs étonnantes dans les calculs de dérivée.
- Quand on introduit un objet, comme par exemple une intégrale, il faut penser à justifier avec toute la rigueur qu'il est bien défini.
- Il est important de participer à la journée de l'oral ou, au moins, de la visionner. Elle répond aux questions de l'organisation et des attendus de chaque oral. Cela permet aux étudiants d'apprendre le déroulement d'un oral du point de vue des membres du jury.

Nous félicitons les candidats pour leur combattivité, qui s'est particulièrement exprimée lors des questions sans préparation, où certains ont pu redresser une situation bien compromise.

Voici quelques sujets proposés cette année. Nous publions aussi leurs corrigés, mais insistons sur le fait que ces corrigés sont indicatifs, qu'ils ont été écrits à l'intention des membres de jury et ne correspondent pas toujours exactement à ce que l'on peut attendre des élèves.

SUJET BL 1

Exercice principal BL 1

1. Question de cours. Soit X une variable aléatoire de densité φ.
   Définition de l'espérance de X si elle existe. Expression de $\mathbb{E}(X)$.

   Soit la fonction $\quad g : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$
2. Etude de g.
   (a) Quel est l'ensemble de définition de g ? Quel est le signe de g ?
   Etudier les variations de g.
   (b) A l'aide d'un encadrement de $g(x)$ quand $x > 0$, étudier $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
   De façon analogue, étudier $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.
   (c) Montrer que g est prolongeable par continuité en 0. On note encore g ce prolongement.
   Que vaut $g(0)$?
   On admet que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Que vaut $g'(0)$?
   Donner l'allure de la courbe de g.
3. Soit $k > 0$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} kg(x) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   (a) Justifier qu'il existe une valeur de k telle que f soit une densité de probabilité. Le réel k prend cette valeur dans la suite de l'exercice.
   (b) Soit X une variable aléatoire de densité f.
   Montrer que X admet une espérance que l'on déterminera.
   Montrer que X admet une variance,
   Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = (X-1)^2$. Montrer que Y admet une espérance.

Solution :

1. Question de cours. X admet une espérance si les deux intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} t\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ convergent ou encore si les deux intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\varphi(-t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ convergent et $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ ou encore $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t\varphi(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} t\varphi(-t)\,\mathrm{d}t$.
   Soit la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt$.
2. Etude de g.
   (a) $h : t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ donc continue sur le segment $[x, 2x]$ si $x > 0$ et sur le segment $[2x, x]$ si $x < 0$. g est donc définie sur $\mathbb{R}^*$.
   Si $x > 0, h$ est positive sur $[x, 2x]$ donc $g(x) \geqslant 0$.
   Si $x < 0, h$ est négative sur $[2x, x]$ donc $\displaystyle\int_{2x}^{x} h(t)dt \leqslant 0$ et par suite $g(x) \geqslant 0$.

Donc g est positive sur $\mathbb{R}^*$.
Soit H une primitive de h sur $\mathbb{R}_+^*$ (sur $\mathbb{R}_-^*$). Alors $g(x) = H(2x) - H(x)$ donc g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (de même sur $\mathbb{R}_-^*$) et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad g'(x) = \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x} = \frac{e^{-2x}\left(1 - e^{x}\right)}{x} < 0$$

Donc g est décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

(b) $\forall x > 0 \quad \forall t \in [x, 2x] \quad e^{-2x} \leqslant e^{-t} \leqslant e^{-x}$ donc

$$e^{-2x}\int_x^{2x} \frac{dt}{t} \leqslant g(x) \leqslant e^{-x}\int_x^{2x} \frac{dt}{t} \quad \text{soit} \quad e^{-2x}\ln 2 \leqslant g(x) \leqslant e^{-x}\ln 2$$

On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.
$\forall x < 0 \quad \forall t \in [2x, x] \quad e^{-x} \leqslant e^{-t} \leqslant e^{-2x}$ donc

$$e^{-x}\int_{2x}^{x} \frac{dt}{t} \geqslant -g(x) \geqslant e^{-x}\int_{2x}^{x} \frac{dt}{t} \quad \text{soit} \quad e^{-2x}\ln 2 \leqslant g(x) \leqslant e^{-x}\ln 2$$

On en déduit que $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$.

(c) L'encadrement lorsque $x < 0$ prouve que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} g(x) = \ln 2$. L'encadrement lorsque $x > 0$ prouve que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} g(x) = \ln 2$.
Donc g est prolongeable par continuité en 0 en posant $g(0) = \ln 2$
On admet que g prolongée est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Ainsi :

$$g'(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} g'(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} g'(x) = -1$$

La courbe présente au point de coordonnées $(0, \ln 2)$ une tangente de pente -1.

3. Probabilités. Soit $k > 0$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} kg(x) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) f est positive sur $\mathbb{R}$, est continue sur $\mathbb{R}^*$.

$$\forall A > 0 \quad \int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant k\ln 2\int_0^A e^{-t}\,\mathrm{d}t \leqslant k\ln 2\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t \leqslant k\ln 2$$

$A \mapsto \displaystyle\int_0^A f(t)\,\mathrm{d}t$ est croissante majorée donc a une limite finie quand A tend vers $+\infty$.
Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et il existe k réel strictement positif tel que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Pour cette valeur de k, f est une densité de probabilité.

(b) Soit X une variable aléatoire de densité f. Comme f est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, il suffit de montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ converge. Soit $A > 0$. En intégrant par parties (car g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$) :

$$\int_0^A xf(x)\,\mathrm{d}x = k\left(\left[\frac{1}{2}x^2 g(x)\right]_0^A - \frac{1}{2}\int_0^A x^2 g'(x)\,\mathrm{d}x\right) = k\left(\frac{1}{2}A^2 g(A) - \frac{1}{2}\int_0^A x\left(e^{-2x} - e^{-x}\right)\,\mathrm{d}x\right)$$

On peut soit intégrer encore par parties, soit chercher une primitive de $x \mapsto x\left(e^{-2x} - e^{-x}\right)$ de la forme $x \mapsto (ax+b)e^{-2x} - (\alpha x + \beta)e^{-x}$ On obtient : $\displaystyle\int_0^A xf(x)dx = \frac{k}{2}\left(A^2 g(A) + (A/2 + 1/4)e^{-2A} - (A+1)e^{-A} + 3/4\right)$
On en déduit la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ (en utilisant l'encadrement $0 \leqslant g(A) \leqslant e^{-A}\ln 2$). Donc l'espérance existe et : $\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{3k}{8}}$.

Pour montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ converge, on procède comme dans a) : $A \mapsto \displaystyle\int_0^{A} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ est croissante majorée. (On aurait pu utiliser le même méthode pour la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$).

On en déduit l'existence du moment d'ordre 2, puis de la variance. $Y = X^2 - 2X + 1$.

Comme X admet un moment d'ordre 2, on en déduit (par linéarité de l'espérance) que Y admet une espérance et que $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - 2\mathbb{E}(X) + 1$.

Exercice sans préparation BL 1

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer AP.
2. Déterminer les valeurs propres de A et les sous-espaces propres associés.
3. A est-elle diagonalisable ? est-elle inversible ?

Solution :

1. $AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$
2. En notant $C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4$ les colonnes de P, on remarque que :
$$AC_1 = 2C_1, \quad AC_3 = 2C_3, \quad AC_2 = 0C_2 \quad \text{et} \quad AC_4 = -C_4$$
Comme les C_k sont non nuls, on en déduit que :
— 0 est valeur propre et C_2 est un vecteur propre associé ;
— -1 est valeur propre et C_4 est un vecteur propre associé ;
— 2 est valeur propre et C_1 et C_3 sont des vecteurs propres associés.
En notant E_λ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ, on déduit de ce qui précède que :
$\dim E_0 \geq 1$, $\dim E_{-1} \geq 1$ et $\dim E_2 \geq 2$ car la famille (C_1, C_3) est libre.
Comme $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, nécessairement : $\dim E_0 = \dim E_{-1} = 1$, $\dim E_1 = 2$
et $E_0 = \mathrm{Vect}\,(C_2)$, $E_{-1} = \mathrm{Vect}\,(C_4)$ et $E_2 = \mathrm{Vect}\,(C_1, C_3)$
3. A est donc diagonalisable et n'est pas inversible car 0 est valeur propre.

SUJET BL 2

Exercice principal BL 2

1. Question de cours. Convergence et somme d'une série géométrique.
2. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période T ($T > 0$).
   Soit x un réel strictement positif.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_n(x) = \displaystyle\int_0^{nT} e^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t$.
   Exprimer $S_n(x)$ à l'aide de $\displaystyle\int_0^{T} e^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t$.
   Etudier $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(x)$.
   (b) Montrer qu'il existe un réel M strictement positif tel que : $\forall t \geqslant 0 \quad |f(t)| \leqslant M$.
   (c) On suppose que f est positive. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
   On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge pour toute fonction f continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique.
   Exprimer $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t$ en fonction de $\displaystyle\int_0^{T} e^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t$.
   (d) Soit E_T l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ admettant T pour période. Soit φ l'application qui à f élément de E_T associe la fonction $F = \varphi(f)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par
   $$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t$$
   Justifier que pour tout $(f, g) \in E_T^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R} \quad \varphi(\lambda f + g) = \lambda\varphi(f) + \varphi(g)$.
3. Soit c la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R} \quad c(x) = \cos x$ et s la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R} \quad s(x) = \sin x$.
   Soit $E = \left\{\lambda c + \mu s / (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$. Muni de l'addition et du produit par un scalaire, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
   On appelle encore φ la restriction de φ à E.
   (a) On admet que
   $$\int_0^{2\pi} e^{-xt} \cos t\,\mathrm{d}t = x \int_0^{2\pi} e^{-xt} \sin t\,\mathrm{d}t = x\left(1 - e^{-2\pi x}\right) - x^2 \int_0^{2\pi} e^{-xt} \cos t\,\mathrm{d}t$$
   En déduire les fonctions $C = \varphi(c)$ et $S = \varphi(s)$ définies sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Montrer que φ est un isomorphisme de E sur $\mathrm{Im}(\varphi)$.
   (c) Montrer les égalités admises à la question a).

Solution :

1. Question de cours. La série géométrique $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$ et alors
   $$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} q^n = \lim_{N\to+\infty} \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}.$$
2. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période $T (T > 0)$ Soit x un réel strictement positif.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. f est continue sur $\mathbb{R}$ donc $t \mapsto e^{-xt}f(t)$ est continue sur $[0, nT]$.

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-xt} f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^T e^{-x(u+kT)} f(u+kT)du = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-xkT} \int_0^T e^{-xu} f(u)du$$

Comme $x > 0$ et $T > 0$, on a $0 < e^{-xu} < 1$ donc :

$$S_n(x) = \frac{1 - e^{-xnT}}{1 - e^{-xT}} \int_0^T e^{-xu} f(u)du \text{ et } \lim_{n \to +\infty} S_n(x) = \frac{1}{1 - e^{-xT}} \int_0^T e^{-xu} f(u)du$$

(b) f st continue sur $\mathbb{R}$; elle est donc bornée sur $[0, T]$, donc $\exists M > 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad |f(t)| \leqslant M$ et comme f est T-périodique, $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [nT, (n+1)T] \quad |f(t)| \leqslant M$. Donc, il existe un réel M strictement positif tel que $\quad \forall t \geqslant 0 \quad |f(t)| \leqslant M$.

(c) On suppose f positive, donc $\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad 0 \leqslant f(t) \leqslant M$

$$\forall A \in \mathbb{R}_+ \qquad \int_0^A e^{-xt} f(t)dt \leqslant \int_0^A e^{-xt} M dt \leqslant M \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt$$

$A \mapsto \displaystyle\int_0^A e^{-xt} f(t)dt$ est croissante majorée donc a une limite finie quand $A \to +\infty$ donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)dt$ converge et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)dt = \frac{1}{1 - e^{-xT}} \int_0^T e^{-xt} f(t)dt$

(d) Soit E_T l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ admettant T pour période. Soit φ l'application qui à f élément de E_T associe la fonction $F = \varphi(f)$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)dt$. D'après la linéarité de l'intégration : $\forall (f, g) \in E_T^2 \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \varphi(\lambda f + g) = \lambda\varphi(f) + \varphi(g)$.

3. (a) On admet que

$$\int_0^{2\pi} e^{-xt} \cos t dt = x \int_0^{2\pi} e^{-xt} \sin t dt = x\left(1 - e^{-2\pi x}\right) - x^2 \int_0^{2\pi} e^{-xt} \cos t dt$$

Alors :

$$C(x) = \frac{1}{1 - e^{-2\pi x}} \int_0^{2\pi} e^{-xt} \cos(t)dt = \frac{1}{1 - e^{-2\pi x}} \frac{x\left(1 - e^{-2\pi x}\right)}{1 + x^2} = \frac{x}{1 + x^2}$$

tandis que :

$$S(x) = \frac{1}{1 - e^{-2\pi x}} \int_0^{2\pi} e^{-xt} \sin(t)dt = \frac{1}{1 + x^2}$$

(b) La famille (c, s) est libre et $\text{Im}(\varphi) = \text{Vect}(\varphi(c), \varphi(s)) = \text{Vect}(C, S)$. De plus (C, S) est libre donc $\dim E = 2 = \dim(\text{Im}(\varphi))$. Enfin l'application φ est linéaire donc φ est un isomorphisme de E sur $\text{Im}(\varphi)$.

(c) Par des intégrations par parties :

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} e^{-xt} \cos t \, \mathrm{dt} &= \left[\sin t e^{-xt}\right]_0^{2\pi} + x \int_0^{2\pi} e^{-xt} \sin t \, \mathrm{dt} \\
&= 0 + x\left(\left[-\cos t e^{-xt}\right]_0^{2\pi} - x \int_0^{2\pi} e^{-xt} \cos t \, \mathrm{dt}\right) \\
&= x\left(1 - e^{-2\pi x}\right) - x^2 \int_0^{2\pi} e^{-xt} \cos t \, \mathrm{dt}
\end{aligned}$$

Exercice sans préparation BL 2

1. Vérifier que : $\dfrac{1}{k(k^2-1)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{2}{k} + \dfrac{1}{k+1}\right)$.
   Montrer qu'il existe un réel a (à déterminer) tel que les relations :
   $$\forall k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\} \qquad \mathbb{P}(X=k) = \frac{a}{k(k^2-1)}$$
   définissent une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$.
2. On rappelle que, pour $x \in \mathbb{R}$, la partie entière de x, notée $\lfloor x \rfloor$, est l'unique entier relatif qui vérifie :
   $$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$$
   Soit alors Y la variable aléatoire définie par $Y = \left\lfloor \dfrac{X}{2} \right\rfloor$.
   Quelle est la loi de Y ?
3. Montrer que X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ et la déterminer.
4. Montrer que Y admet une espérance.

Solution :

1. On vérifie facilement que :
   $$\forall k \in \mathbb{N} - \{0,\ 1\} \quad \frac{1}{k(k^2-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{2}{k} + \frac{1}{k+1}\right)$$
   Les relations $\forall k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\} \qquad P(X=k) = \dfrac{a}{k(k^2-1)}$
   définissent une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$.
   si et seulement si $a \geq 0$ et la série de terme général converge et sa somme vaut 1.
   Soit $n \geqslant 2$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{a}{k(k^2-1)}$. Alors
   $$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{a}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{2}{k} + \frac{1}{k+1}\right) = \frac{a}{4} + \frac{a}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)$$
   d'où :
   $$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{a}{4}$$
   et donc : $a = 4$.
2. $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $P(Y=k) = P(\{X=2k\}\bigcup\{X=2k+1\})$.
   Les deux événements $\{X=2k\}$ et $\{X=2k+1\}$ sont disjoints donc
   $$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(Y=k) = \frac{4}{2k(4k^2-1)} + \frac{4}{(2k+1)(4k^2+4k)}$$
3. Soit $n \geq 2$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} kP(X=k)$. Alors
   $$T_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{4}{k^2-1} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{2}{k-1} - \frac{2}{k+1}\right)$$
   qui tend vers 3 quand $n \to +\infty$.
   Donc X admet une espérance et $\mathbb{E}(X) = 3$.

4. Soit $n \geq 2$ et $V_n = \sum_{k=2}^{n} kP(Y = k)$. Alors

$$V_n = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{2} 2kP(X = 2k) + \frac{1}{2}(2k+1)P(X = 2k+1) \right) - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n} P(X = 2k+1)$$

La première somme tend vers $\mathbb{E}(X)/2$ et la deuxième a une limite finie appartenant à $]0, 1/2[$. Donc Y admet une espérance et $\mathbb{E}(Y) \in \left] 1, \frac{3}{2} \right[$.

SUJET BL 3

Exercice principal BL 3

1. Question de cours : Définition d'une densité de probabilité.

   Toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
   Soit α un réel non nul et f_α la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_\alpha(x) = \begin{cases} x^{-\alpha} \ln x & \text{si} \quad x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. (a) Etudier f_α selon les valeurs de α : limite en $+\infty$, variations de f_α.
   (b) Préciser l'allure de la courbe représentative de f_α au voisinage du point d'abscisse 1.
3. (a) Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_\alpha(x)\,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
   (b) Montrer que f_α est une densité de probabilité si et seulement si $\alpha = 2$.
   Tracer la courbe représentative de f_2.
   Soit X_2 une variable aléatoire de densité f_2. La variable X_2 admet-elle une espérance ?
4. (a) Montrer que, si $\alpha > 1$, il existe un réel k_α tel que $k_\alpha f_\alpha$ soit une densité de probabilité.
   (b) Soit X_α une variable aléatoire de densité $k_\alpha f_\alpha$.
   Pour quelles valeurs de α admet-elle une espérance ? une variance ?
   (c) Soit la variable aléatoire $Y_\alpha = X_\alpha^2$.
   Montrer que Y_α est une variable à densité. Pour quelles valeurs de α admet-elle une espérance ? une variance ?

Solution :

1. f est une densité de probabilité si f est définie sur $\mathbb{R}$, positive ou nulle sur $\mathbb{R}$, continue sauf éventuellement en un nombre fini de points et si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
2. (a) Si $\alpha > 0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = 0$ (croissances comparées). Si $\alpha \leqslant 0$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = +\infty$.
   f_α est de classe C^1 sur $[1, +\infty[$ et : $\forall x \in [1, +\infty[$ $\;f'_\alpha(x) = \dfrac{1 - \alpha \ln x}{x^{\alpha+1}}$. De plus :

$$f'_\alpha(x) = 0 \Leftrightarrow x = \exp\left(\frac{1}{\alpha}\right) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) > 1 & \text{si} \quad \alpha > 0 \\ \exp\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) < 1 & \text{si} \quad \alpha < 0 \end{cases}$$

   La fonction f_α est constante nulle sur $]-\infty, 1]$. De plus, si $\alpha > 0, f_\alpha$ est strictement croissante sur $\left[1, \exp\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\exp\left(\dfrac{1}{\alpha}\right), +\infty\right[$.
   (b) $f'_{\alpha,g}(1) = 0$ et $f'_{\alpha,d}(1) = 1$ donc la courbe au point d'abscisse 1 présente un point anguleux.
   On peut chercher la position de la courbe par rapport à la demi-tangente de pente 1 .
   On pose $x = 1 + u$ avec $u \geqslant 0$. Alors

$$\begin{aligned} f_\alpha(1+u) &= (1+u)^{-\alpha} \ln(1+u) \\ &= \left(1 - \alpha u + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} u^2 + o\left(u^2\right)\right)\left(u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o\left(u^3\right)\right) \\ &= u - \left(\alpha + \frac{1}{2}\right) u^2 + \left(\frac{2 + 6\alpha + 3\alpha^2}{6}\right) u^3 + o\left(u^3\right) \end{aligned}$$

Si $\alpha \neq -\frac{1}{2}$, $f_\alpha(1+u) = u - \left(\alpha + \frac{1}{2}\right) u^2 + o\left(u^2\right)$. Ainsi, la courbe est au-dessus de la demi tangente si $\alpha + \frac{1}{2} < 0$ et au-dessous si $\alpha + \frac{1}{2} > 0$.

Si $\alpha = \frac{1}{2}$, $f_\alpha(1+u) = u - \frac{1}{24}u^3 + o\left(u^3\right)$ et la courbe est au-dessous de la demi-tangente.

3. (a) La fonction f_α est continue sur $[1, +\infty[$.
Soit $A > 1$. En intégrant par parties :

$$F_\alpha(A) = \int_1^A x^{-\alpha} \ln x \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{1-\alpha} \ln x\right]_1^A - \int_1^A \frac{x^{-\alpha}}{1-\alpha} \,\mathrm{d}x = \frac{A^{1-\alpha}}{1-\alpha} \ln A - \frac{1}{(1-\alpha)^2} \left(A^{1-\alpha} - 1\right)$$

Si $\alpha \leqslant 1$, $\lim\limits_{A \to +\infty} F_\alpha(A) = +\infty$, tandis que si $\alpha > 1$, $\lim\limits_{A \to +\infty} F_\alpha(A) = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$.

Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_\alpha(x) \,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

(b) La fonction f_α est continue positive sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{A \to +\infty} F_\alpha(A) = 1 \Leftrightarrow \alpha = 2$. Donc f_α est une densité de probabilité si et seulement si $\alpha = 2$.

Pour le tracé de la courbe représentative de f_2 : le maximum de f_2 est $\frac{1}{2e}$ et est atteint en $\sqrt{e}$.

Soit X_2 une variable aléatoire de densité f_2. Alors X_2 n'admet pas d'espérance car $\displaystyle\int_1^{+\infty} x x^{-2} \ln x \,\mathrm{d}x$ diverge (d'après 3.a)).

4. (a) Si $\alpha > 1$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_\alpha(x) \,\mathrm{d}x$ converge et vaut $\frac{1}{(1-\alpha)^2}$, donc en posant $k_\alpha = (1-\alpha)^2$, $k_\alpha f_\alpha$ est une densité de probabilité.

(b) D'après la question 3.a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^n k_\alpha f_\alpha(x) \,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\alpha - n > 1$ donc X_α admet une espérance si et seulement si $\alpha > 2$ et une variance si et seulement si $\alpha > 3$.

(c) Y_α prend ses valeurs dans $[1, +\infty[$. Soit F sa fonction de répartition. Alors

$$\forall y \in]-\infty, 1] \quad F(y) = 0 \quad \text{et} \quad \forall y \in [1, +\infty[\quad F(y) = P\left(X^2 \leqslant y\right) = F_\alpha(\sqrt{y})$$

Donc la fonction de répartition F est continue sur $\mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ donc Y_α est une variable à densité. Une densité f est alors définie par :

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} k_\alpha f_\alpha(\sqrt{y}) & \text{si} \quad y \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

De plus :

$$\int_1^{+\infty} y^n f(y) \,\mathrm{d}y = \int_1^{+\infty} x^{2n} \times \frac{1}{2x} \times k_\alpha f_\alpha(x) \times 2x \,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} x^{2n} k_\alpha f_\alpha(x) \,\mathrm{d}x$$

qui converge si et seulement si $\alpha - 2n > 1$. Donc Y_α admet une espérance si et seulement si $\alpha > 3$ et une variance si et seulemeny si $\alpha > 5$.

Exercice sans préparation BL 3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et a et b deux réels.
Soit M_n la matrice carrée d'ordre $2n$ dont les coefficients $m_{i,j}$ sont définis par :

$$m_{i,j} = \begin{cases} a & \text{si } i+j \text{ est pair} \\ b & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Cas $n = 1$.
   La matrice M_1 est-elle inversible ? Quel est le rang de M_1 ?
   Quels sont les valeurs propres et les sous-espaces propres de M_1 ? La matrice M_1 est-elle diagonalisable ?
2. Cas $n = 2$.
   Mêmes questions pour M_2.

Solution :

1. $M_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.
   M_1 est inversible si et seulement si $a^2 \neq b^2$.
   Si $a = b = 0$, $\mathrm{rg}\,(M_1) = 0$
   Si $a^2 = b^2$ avec $a \neq 0$, $\mathrm{rg}\,(M_1) = 1$
   Si $a^2 \neq b^2$,$\mathrm{rg}\,(M_1) = 2$.
   — Si $a = b = 0$, 0 est la seule valeur propre, $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ est le sous espace propre associé et M_1 est diagonalisable.
   — Si $a = b$ avec $a \neq 0$, deux valeurs propres distinctes :
     - 0 de sous espace propre associé Vect $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$;
     - $2a$ de sous espace propre associé Vect $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

     Alors M_1 est diagonalisable.
   — Si $a = -b \neq 0$, deux valeurs propres distinctes :
     - 0 de sous espace propre associé Vect $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$;
     - $2a$ de sous espace propre associé Vect $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

     Alors M_1 est diagonalisable.
   — Si $a^2 \neq b^2$, deux valeurs propres distinctes :
     - $a - b$ de sous espace propre associé Vect $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$;
     - $a + b$ de sous espace propre associé Vect $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

     Alors M_1 est diagonalisable.
2. $M_2 = \begin{pmatrix} a & b & a & b \\ b & a & b & a \\ a & b & a & b \\ b & a & b & a \end{pmatrix}$.
   La matrice M_2 est jamais inversible car son rang est au plus 2.
   Si $a = b = 0$, $\mathrm{rg}\,(M_1) = 0$.
   Si $a^2 = b^2$ avec $a \neq 0$, $\mathrm{rg}\,(M_1) = 1$.
   Si $a^2 \neq b^2$, $\mathrm{rg}\,(M_1) = 2$.
   — Si $a = b = 0$, 0 est la seule valeur propre, $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ est le sous espace propre associé et M_2 est diagonalisable.
   — Si $a = b$ avec $a \neq 0$, deux valeurs propres distinctes :

- 0 de sous espace propre associé $\operatorname{Ker} M$ de dimension 3 ;
- $4a$ de sous espace propre associé $\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

Ainsi M_2 est diagonalisable.

— Si $a = -b$ avec $a \neq 0$, deux valeurs propres distinctes :
- 0 de sous espace propre associé $\operatorname{Ker} M$ de dimension 3 ;
- $4a$ de sous espace propre associé $\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$.

Alors M_2 est diagonalisable.

— Si $a^2 \neq b^2$, trois valeurs propres distinctes :
- 0 de sous espace propre associé $\operatorname{Ker} M$ de dimension 2 ;
- $2(a-b)$ de sous espace propre associé $\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$;
- $2(a+b)$ de sous espace propre associé $\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

Alors M_2 est diagonalisable.

3. Si on a le temps : cas n quelconque.

SUJET BL 4

Exercice principal BL 4

1. Question de cours : énoncé de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Soit X une variable aléatoire gaussienne centrée réduite (de loi $\mathcal{N}(0,1)$).
   (a) Montrer que X admet des moments de tous ordres et déterminer un entier k_n tel que :
   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{E}\left(X^{n+2}\right) = k_n \mathbb{E}\left(X^n\right)$$
   où $\mathbb{E}\left(X^n\right)$ désigne le moment d'ordre n de X.
   (b) Que vaut $\mathbb{E}\left(X^n\right)$ si n est impair ? Que vaut $\mathbb{E}\left(X^4\right)$?
3. Soit Y la variable aléatoire définie par : $Y = X + 1$.
   (a) Quelle est la loi de Y ?
   (b) Calculer les moments d'ordre 2 et 4 de Y.
4. On dit qu'une suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire constante m si :
   $$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\{|Z_n - m| \geqslant \varepsilon\}\right) = 0$$
   Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes toutes de même loi que Y.
   (a) On pose $Z_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$ Montrer que $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers 1 .
   (b) On pose $T_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k^4$ Montrer que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers 10 .

Solution :

1. Question de cours : énoncé de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Soit X une variable aléatoire admettant une espérance $\mathbb{E}(X)$ et une variance $\mathbb{V}(X)$.
   $$\forall a \quad \mathbb{P}(\{|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant a\}) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{a^2}$$
2. Soit X une variable aléatoire gaussienne centrée réduite. Soit φ une densité de X :
   $$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Soit A et B deux réels tels que $A < B$. En intégrant par parties, φ et les fonctions monômes étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}$:
   $$\int_A^B x^{n+2}\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_A^B x^{n+1} x\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \left[-x^n\varphi(x)\right]_A^B + (n+1)\int_A^B x^n\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$
   Par croissances comparées de l'exponentielle et de la fonction puissance :
   $$\lim_{A\to-\infty} A^n\varphi(A) = 0 \lim_{B\to+\infty} B^n\varphi(B) = 0$$
   donc, sous réserve d'existence des moments :
   $$\mathbb{E}\left(X^{n+2}\right) = \lim_{\substack{A\to-\infty\\ B\to+\infty}} \int_A^B x^{n+2}\varphi(x)\,\mathrm{d}x = (n+1)\mathbb{E}\left(X^n\right)$$

Comme X admet des moments d'ordre 1 et d'ordre 2, on en déduit par récurrence que X admet des moments de tous ordres et

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{E}\left(X^{n+2}\right) = (n+1)\mathbb{E}\left(X^{n}\right)}$$

(b) Si n est impair, comme φ est paire $\mathbb{E}\left(X^{n}\right) = 0$ (ou encore par récurrence en utilisant $\mathbb{E}(X) = 0$).
Par ailleurs : $\mathbb{E}\left(X^{0}\right) = 1$ donc $\mathbb{E}\left(X^{2}\right) = 1 \times \mathbb{E}\left(X^{0}\right) = 1$; que l'on retrouve avec $\mathbb{E}\left(X^{2}\right) = \mathbb{V}(X) + (\mathbb{E}(X))^2 = 1 + 0$.
Enfin : $\mathbb{E}\left(X^{4}\right) = (2+1)\mathbb{E}\left(X^{2}\right) = 3$

3. Soit Y la variable aléatoire définie par : $Y = X + 1$.

(a) Y est une variable gaussienne de moyenne 1 et de variance 1 (de loi $\mathcal{N}(1,1)$).

(b) $Y^2 = X^2 + 2X + 1$. Donc : $\mathbb{E}\left(Y^{2}\right) = \mathbb{E}\left(X^{2}\right) + 2\mathbb{E}(X) + 1 = 2$.
$Y^4 = X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 4X + 1$ donc $\mathbb{E}\left(Y^{4}\right) = 3 + 0 + 6 + 0 + 1 = 10$.

4. (a) Par linéarité de l'espérance : $\mathbb{E}\left(Z_n\right) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(Y_k\right) = 1$.

Les Y_k sont indépendantes donc $\mathbb{V}\left(Z_n\right) = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mathbb{V}\left(Y_k\right) = \dfrac{1}{n}$.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}\left(\{|Z_n - 1| \geqslant \varepsilon\}\right) \leqslant \frac{1}{n\varepsilon^2}$$

Or $\dfrac{1}{n\varepsilon^2}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini donc (Z_n) converge en probabilité vers 1.

(b) Par linéarité de l'espérance : $\mathbb{E}\left(T_n\right) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(Y_k^4\right) = 10$.

Les Y_k^4 sont indépendantes donc $\mathbb{V}\left(T_n\right) = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mathbb{V}\left(Y_k^4\right) = \dfrac{1}{n}\mathbb{V}\left(Y^4\right)$. On n'a pas besoin de la valeur de $\mathbb{V}\left(Y^4\right)$, son existence suffit. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\left(\{|T_n - 10| \geqslant \varepsilon\}\right) \leqslant \frac{V\left(Y^4\right)}{n\varepsilon^2}$$

Or $\dfrac{V\left(Y^4\right)}{n\varepsilon^2}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini donc (T_n) converge en probabilité vers 10 .

Exercice sans préparation BL 4

Soit l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel $\langle \cdot ; \cdot \rangle$. On identifie $\mathbb{R}^3$ avec $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Soit $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. On note C_1, C_2, C_3 les trois colonnes de A.

1. Que peut-on dire de la famille (C_1, C_2, C_3) dans l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$?
2. En déduire la valeur de A^2.
3. Soit λ une valeur propre de A et X une matrice colonne propre associée. Calculer A^2X en fonction de λ et X.
   Montrer que λ appartient à l'ensemble $\{-1, 1\}$.
   On admet qu'une matrice symétrique à coefficients réels est diagonalisable. En utilisant la trace de A, préciser les valeurs propres de A et une matrice D diagonale représentant l'endomorphisme associé à A dans une base de vecteurs propres.

Solution :

1. Les colonnes $C_1,\ C_2,\ C_3$ sont de norme 1 et deux à deux orthogonales donc la famille (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.
2. A est symétrique donc $A^2 = AA^T = (< C_i, C_j >)_{1 \leqslant i,j \leqslant 3} = I_3$.
3. Soit λ une valeur propre de A et X une matrice colonne propre associée. Alors $A^2X = A(\lambda X) = \lambda AX = \lambda^2 X$. Par ailleurs, $A^2X = I_3 X = X$. Donc $\lambda^2 X = X$ et comme $X \neq 0$ car X est un vecteur propre : $\lambda^2 = 1$. Donc, $\lambda \in \{-1, 1\}$.
   Comme A est diagonalisable en tant que matrice symétrique, il existe une matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$ et où les λ_k sont les valeurs propres de A.
   Par ailleurs :
   $\mathrm{Tr}\,(A) = \mathrm{Tr}\,\left(PDP^{-1}\right) = \mathrm{Tr}\,\left(DPP^{-1}\right) = \mathrm{Tr}\,(D)$. Or $\mathrm{Tr}\,(A) = 1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ et chaque λ_k vaut -1 ou 1 donc il y a deux « 1 » et un « -1 » sur la diagonale de D.