Rapport et exercices oraux HEC Mathématiques ECT

Juin 2023

Le bilan de la session 2023 de mathématiques voie T est satisfaisant.

Cette année les notes se sont étalées entre 1 et 20. La moyenne s'établit à 9,02 et l'écart-type à 4,91.

Le niveau d'ensemble des candidats reste assez hétérogène : si certaines prestations se sont avérées catastrophiques, il y en a également eu de très brillantes avec des candidats faisant preuve de bonnes capacités de réflexion.

Le jury insiste à nouveau sur sur les points suivants auprès des futur.e.s candidat.e.s et de leurs enseignant.e.s.

- Les raisonnements graphiques et les tracés de courbes restent incontournables. Notamment, le jury est en droit d'attendre l'esquisse qualitative d'une courbe après avoir établi un tableau de variation.
- Le jury continue de remarquer de grosses lacunes en calcul. De même, les théorèmes du cours doivent être connus avec plus de rigueur : hypothèses précises et conclusions.
- Avec la dernière réforme des programmes, l'informatique a pris une place plus importante. La quasi-totalité des sujets contenait au moins une question d'informatique. Cela sera encore le cas l'an prochain, le but étant d'interroger tous les candidats sur une partie du programme d'informatique. En particulier, il ne faut pas négliger le SQL.
- Les candidats ne doivent pas oublier qu'il s'agit d'un oral. Tout n'est pas joué à l'issue de la préparation. Le jury est extrêmement attentif à la qualité du dialogue qu'il noue avec le candidat. Il est fortement conseillé d'écrire au tableau ce qui est proposé par le jury. Des candidats peuvent se voir attribuer une bonne note alors qu'ils ne traitent pas un grand nombre question, tandis que d'autres, ayant l'impression d'avoir pourtant traité tout le sujet, se retrouvent avec une note décevante car leur exposition est trop brouillonne et manque de la rigueur exigible dans le maniement des concepts.
- La question sans préparation est aussi très importante. Il n'est pas nécessaire de la mener à son terme pour faire bonne impression. Le jury est là encore attentif aux qualités de réflexion des candidats. Le candidat n'est pas obligé de parler instantanément en découvrant l'énoncé. Le jury a pu constater que certains candidats, qui avaient complètement raté l'exercice préparé ont redressé la barre sur l'exercice sans préparation.
- Il est important de participer à la journée de l'oral ou, au moins, de la visionner. Elle répond aux questions de l'organisation et des attendus de chaque oral.
  Cela permet aux étudiants d'apprendre le déroulement d'un oral du point de vue des membres du jury.

Voici les sujets proposés cette année. Nous publions aussi leurs corrigés, mais insistons sur le fait que ces corrigés sont indicatifs, ont été écrits à l'intention des membres du jury et ne correspondent pas toujours exactement à ce que l'on peut attendre des élèves.

SUJET T 1

Exercice principal T 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geqslant 2$.

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire au hasard une poignée de jetons (c'est-à-dire une partie, éventuellement vide, de l'ensemble des jetons). On note N le nombre de jetons tirés et S la somme des numéros de jetons tirés.

1. Question de cours : indépendance de deux variables aléatoires.
2. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par N, puis la loi de N.
3. Ecrire le code d'une fonction Python `simule_S(n)` qui prend un entier n en argument, simule le tirage de la poignée de jetons et renvoie la valeur de S.
4. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale à 1 si le jeton n° i est dans la poignée tirée et à 0 sinon.
   (a) Déterminer la loi de X_i pour $i \in [\![1, n]\!]$.
   (b) Montrer que, pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $i \neq j$, les variables X_i et X_j sont indépendantes.
5. (a) Exprimer S à l'aide des X_i.
   (b) Déterminer l'espérance de S.

Solution :

1. Question de cours : programme ECT2 p. 6.
2. De manière immédiate N est à valeurs dans $[\![0, n]\!]$.
   Alors, par équiprobabilité, pour $k \in [\![0, n]\!]$:
   $$\mathbb{P}(N = k) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$
   car un tirage favorable est donné par une partie à k éléments d'un ensemble à n éléments, tandis qu'un tirage possible est une partie d'un ensemble à n éléments et il y en a 2^n (pour chaque élément, on choisit s'il est ou non dans la partie donnée).
3. Une solution est le code suivant :

```python
import numpy.random as rd

def simule_S(n):
    for i in range(1,n+1):
        p=rd.random()
        if p<1/2:
            S=S+i
    return S
```

4. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale à 1 si le jeton n° i est dans la poignée tirée et à 0 sinon.
   (a) La variable X_i est une variable de Bernoulli. Par équiprobabilité des poignées :
   $$\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}$$
   car un tirage favorable revient à se donner une poignée de l'ensemble des jetons privé du jeton n° i, déjà inclus dans la poignée. Ainsi : $\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!] \quad X_i \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)}$.

(b) Comme X_i et X_j sont des variables de Bernoulli, elles sont indépendantes si et seulement si $\mathbb{P}(X_i = 1, X_j = 1) = \mathbb{P}(X_i = 1)\mathbb{P}(X_j = 1)$ (les événements $\{X_i = 1\}$ et $\{X_i = 0\}$ sont complémentaires).

Or, d'après la question précédente : $\mathbb{P}(X_i = 1, X_j = 1) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$.

Par ailleurs : $\mathbb{P}(X_i = 1, X_j = 1) = \dfrac{2^{n-2}}{2^n} = \dfrac{1}{4}$ car se donner une poignée contenant les jetons n° i et j revient, une fois sélectionnés ces deux jetons, à choisir une poignée des $n-2$ jetons restants, c'est-à-dire une partie d'un ensemble à $n-2$ éléments.

On a donc bien $\mathbb{P}(X_i = 1, X_j = 1) = \mathbb{P}(X_i = 1)\mathbb{P}(X_j = 1)$ et les variables X_i et X_j sont indépendantes.

5. (a) On a $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} iX_i$.

(b) Comme $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$ pour X et Y des variables aléatoires et a et b des réels, une récurrence prouve que :

$$\mathbb{E}(S) = \sum_{i=1}^{n} i\mathbb{E}(X_i)$$

Or, pour tout i, $\mathbb{E}(X_i) = \dfrac{1}{2}$ d'où :

$$\mathbb{E}(S) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i \quad \text{soit} \quad \boxed{\mathbb{E}(S) = \frac{n(n+1)}{4}}$$

Exercice sans préparation T 1

On dispose d'une base de données regroupant des informations sur les cafés parisiens. Son schéma relationnel est le suivant :

— Cafes (Nom : TEXT, Adresse : TEXT, Arrondissement : INTEGER, Prix_cafe : INTEGER)

Ecrire les requêtes SQL permettant d'afficher :

1. la liste des cafés dans le 14ᵉ arrondissement ;
2. le prix moyen du café dans les cafés parisiens. On pourra utiliser la fonction de moyenne AVG() ;
3. le nombre de cafés où le prix du café est à 1 euro. On pourra utiliser la fonction de comptage COUNT().

Solution :

1. Une possibilité est :

```
SELECT *
FROM Cafes
WHERE Arrondissement=14
```

2. Une possibilité est :

```
SELECT AVG(Prix_cafe)
FROM Cafes
```

3. Une possibilité est :

```
SELECT COUNT()
FROM Cafes
WHERE Prix_cafe=1
```

SUJET T 2

Exercice principal T 2

On note I la matrice unité d'ordre 3.

On considère, pour un réel m donné, la matrice : $M = \begin{pmatrix} -1 & m & m \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1. Cours. Matrice et formule du binôme.
2. (a) Calculer $(M+I)^3$.

   (b) Pour n entier naturel, en déduire M^n en fonction de I, M, M^2 et n.
3. On se propose de vérifier le résultat de la question 2. (b) avec un programme Python.

   (a) Ecrire le code d'une fonction `Puissance(M,n)` qui prend en argument une matrice carrée M d'ordre 3 et un entier naturel n, et qui retourne la puissance $n^{\text{ième}}$ de M.
   On pourra utiliser la commande `np.identity(n)` qui renvoie la matrice identité d'ordre n.

   (b) Compléter le code de la fonction suivante, qui prend en argument un réel m, un entier n et affiche les valeurs de M_m^n calculées par les deux méthodes.

```
import numpy as np

def affichage(m,n):
        I=np.identity(3)
        M_m=np.array([[-1,m,m],[1,-1,0],[-1,0,-1]])
        print("Puissance nieme de M  pour m = ",m)
        print("Par le calcul : ")
        print(......................)
        print("Par la formule ; ")
        print(.......................)
```

4. Montrer que la matrice M est inversible et exprimer la matrice M^{-1} en fonction de I, M et M^2.
5. (a) Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant : il existe une matrice P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $B = P^{-1}AP$.
   Vérifier que si une matrice X de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ de $\mathbb{R}$, alors : $Y = P^{-1}X$ est vecteur propre de B associé à la valeur propre λ.

   (b) La matrice M admet-elle des valeurs propres ? Est-elle diagonalisable ?

Solution :

1. Cours - programme de seconde année p. 4.
2. (a) *Calcul de* $(M+I)^3$:
   Le calcul donne : $M+I = \begin{pmatrix} 0 & m & m \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $(M+I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & m \\ 0 & -m & -m \end{pmatrix}$ et : $(M+I)^3 = 0$ (matrice nulle d'ordre 3)

(b) En remarquant que : $M=-I+(M+I)$, la formule du binôme donne, vu que $(M+I)^3=0$:

$$\begin{aligned}
M^n &= (-1)^n I + n.(-1)^{n-1}(M+I) + \frac{n.(n-1)}{2}.(-1)^{n-2}(M+I)^2\\
&= (-1)^n I + (-1)^{n-1} n.M + (-1)^{n-1} n.I + (-1)^n \frac{n.(n-1)}{2}.M^2 + (-1)^n n.(n-1).M + (-1)^n \frac{n.(n-1)}{2}.I\\
&= (-1)^n \frac{n.(n-1)}{2}.M^2 + \left[(-1)^{n-1} n + (-1)^n n.(n-1)\right] M + \left[(-1)^n + (-1)^{n-1} n + (-1)^n \frac{n.(n-1)}{2}\right] I
\end{aligned}$$

soit $M^n = (-1)^n \dfrac{n.(n-1)}{2} . M^2 + (-1)^n n(n-2) . M + (-1)^n \dfrac{(n-1)(n-2)}{2} . I$

ou $M^n = (-1)^n \left(\dfrac{n.(n-1)}{2} . M^2 + n(n-2) . M + \dfrac{(n-1)(n-2)}{2} . I \right)$

3. (a) Programme Python :
Pour calculer la puissance n$^{\text{ième}}$ de M, on calcule les puissances successives par une boucle qui multiplie à chaque étape le résultat par M et qui est initialisée à la matrice identité.

```python
import numpy as np

def Puissance(M,n):
    Mn=np.identity(3)
    for k in range(1,n+1):
        Mn=Mn.dot(M)
    return Mn
```

(b) On complète le code à l'aide de la fonction `Puissance(M,n)`.

```python
import numpy as np

def affichage(m,n):
        I=np.identity(3)
        M_m=np.array([[-1,m,m],[1,-1,0],[-1,0,-1]])
        print("Puissance nieme de M  pour m = ",m)
        print("Par le calcul : ")
        print(Puissance(M_m,n))
        print("Par la formule ; ")
        print((-1)**n*((n*(n-1)/2)*Puissance(M_m,2)+
               n*(n-2)*M_m+((n-1)*(n-2)/2)*I))
```

4. $(M+I)^3=0 \iff M^3+3M^2+3M+I=0 \iff M.\left(-M^2-3M-3I\right)=I$
ce qui montre que : M est inversible et $M^{-1}=-M^2-3M-3I$.

5. (a) A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant : $\exists P\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $B=P^{-1}AP$.

$X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda\in\mathbb{R} \iff \begin{cases} X\neq 0\\ A.X=\lambda.X\end{cases}$

Alors, pour $Y=P^{-1}.X$:

$B.Y \underset{\substack{Y=P^{-1}.X\\ B=P^{-1}AP}}{=} P^{-1}.A.P.P^{-1}.X = P^{-1}.A.X \underset{\substack{X \text{ vect.}\\ \text{propre de } A\\ \text{associé à } \lambda}}{=} P^{-1}.\lambda.X = \lambda.P^{-1}.X = \lambda.Y$ i.e. $B.Y=\lambda.Y$

$X\neq 0$ et P^{-1} inversible $\implies$, $P^{-1}.X\neq 0$ i.e. $Y\neq 0$

Par conséquent, $Y=P^{-1}.X$ est vecteur propre de B associé à $\lambda\in\mathbb{R}$.

(b)
- $M+I$ ne peut pas être inversible, sinon $(M+I)^3$ le serait.
Donc il existe $X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\neq 0$ tel que $(M+I).X=0$, i.e. $M.X=-X$: ainsi -1 est valeur propre de M.
- $(M+I)^3=0$ implique que $p(x)=(x+1)^3$ est un polynôme annulateur de M.
Donc toute valeur propre de M est racine de p; d'où : la seule valeur propre possible de M est -1.
- Si M était diagonalisable, il existerait deux matrices, P inversible et D diagonale, telles que $M=P^{-1}DP$.
Les termes de la diagonale étant valeurs propres de D, seraient valeurs propres de M (cf **a.**) et D serait $-I$.
Mais alors : $P^{-1}DP=P^{-1}(-I)P=-P^{-1}I\,P=-I$: absurde, car $M\neq -I$.
Donc M n'est pas diagonalisable.

Exercice sans préparation T 2

1. Résoudre le plus simplement possible l'inéquation $|x-1|+|x+1| \leqslant 2$.
2. Soit une série statistique définie par $x_1, x_2, ..., x_n$ avec des fréquences $f_1, f_2, ..., f_n$.

   Trouver l'ensemble E des valeurs réelles de x qui rendent la quantité $\displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} f_i(x-x_i)^2$ minimale.
3. L'ensemble E est-il toujours égal à l'ensemble F des valeurs qui rendent minimale la quantité $\displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} f_i|x-x_i|$?

Solution :

1. $|x-1|+|x+1|$ représente la somme des distances du point M d'abscisse x aux points d'abscisse 1 et -1 ; donc tous les points du segment $[-1;\ 1]$ sont tels que $|x-1|+|x+1|=2$ tandis que les autres points sont à une distance strictement supérieure à 2 ; donc $E=[-1;\ 1]$.
2. On dérive la fonction f définie par $f(x)=\displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} f_i(x-x_i)^2$; on a : $f'(x)=\displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} 2f_i(x-x_i)$.

   Cette dérivée s'annule en $m=\displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} f_i x_i$ $\left(\text{puisque } \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} f_i = 1\right)$.

   Il s'agit bien d'un minimum d'aprés le signe de la dérivée (- puis +). Donc $E=\{m\}$.
3. Non pas toujours .

   En s'inspirant de 1., on choisit : $n=2$ et $x_1=-1$ et $x_2=1$ avec $f_1=f_2=\dfrac{1}{2}$. Alors $F=[-1;1]$.

SUJET T 3

Exercice principal T 3

Soit n un entier strictement positif. On lance n fois un dé parfait. On note X (respectivement Y) la variable aléatoire égale au nombre de 5 (respectivement de 6) obtenus au cours de ces n lancers.

1. Cours. Définition de variables aléatoires discrètes finies indépendantes.
2. Déterminer les lois de X et de Y, puis la loi de la variable aléatoire $X+Y$.
3. (a) Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).
   (b) Écrire en Python une fonction `experience(n)` simulant le lancer de n dés et retournant le nombre de cinq et le nombre de six obtenus.
4. (a) Calculez le coefficient de corrélation linéaire du couple (X, Y) ; expliquez son signe.
   (b) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ? Expliquez.
   (c) La variable Y est-elle une fonction affine de X ?
5. Trouver des valeurs de n telles que la fréquence d'apparition d'un 5 ou d'un 6 soit égale à $\frac{1}{3}$, à $0,01$ près, avec une probabilité au moins égale à $0,9$.

Solution :

1. Cours : Indépendance mutuelle de n variables aléatoires - programme de seconde année p.10.
2. - variable aléatoire X [resp. Y] : nombre de succès lors de la répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes "lancer d'un dé", la probabilité de succès (obtenir cinq [resp. six]) étant égale à $1/6$.
   Donc X et Y suivent $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{6}\right)$.
   - variable aléatoire $X+Y$: nombre de cinq et de six lors des n lancers indépendants : le succès consiste à obtenir un résultat dans le sous-ensemble $\{5,6\}$ de $\{1,2,3,4,5,6\}$, la probabilité de succès est $2/6 = 1/3$.
   Donc $X+Y$ suit $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$.
3. (a) Loi conjointe du couple (X, Y) :
   - Univers (cas possibles) : $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^n$; nombre de cas possibles : $\text{Card}(\Omega) = 6^n$.
   - Évènement (X=i, Y=j) avec i et j dans $[[0; n]]$ tels que $i+j \leqslant n$; nombre d'éléments de (X=i, Y=j)$\subset \Omega$:
   nombre de cas favorables = nombre d'emplacements parmi les n cases contenant les i cinq $\times$ nombre d'emplacements parmi les $n-i$ cases restantes contenant les j six $\times$ nombre de façons de remplir les $n-i-j$ cases restantes avec des nombres autres que cinq et six
   $= \binom{n}{i} \times \binom{n-i}{j} \times 4^{n-i-j}$ ou : $\dfrac{n\,!}{i\,!\,j\,!\,(n-i-j)!} \times 4^{n-i-j}$ sous forme symétrique.
   Donc : $p_{ij} = \mathbb{P}((X=i, Y=j)) = \binom{n}{i} \times \binom{n-i}{j} \times \dfrac{4^{n-i-j}}{6^n} = \binom{n}{i} \times \binom{n-i}{j} \times \left(\dfrac{1}{6}\right)^{i+j} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-i-j}$
   ou sous forme symétrique : $p_{ij} = \dfrac{n\,!}{i\,!\,j\,!\,(n-i-j)!} \left(\dfrac{1}{6}\right)^{i+j} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-i-j}$

   (b) Programme Python. Une possibilité :

```python
import numpy.random as rd

def experience(n):
    x=0 ; y=0
```

```python
    for i in range(n):
        lancer=rd.randint(1,7)
        if lancer == 5:
            x+=1
        elif lancer == 6 :
            y+=1
    return(x,y)
```

La fonction `randint` figurant dans le calcul de la variable « lancer » est utilisée en deuxième année mais ne figure pas dans les commandes exigibles. Dans le cas hautement improbable où elle n'ait pas été vue, une variante possible est l'affectation : `lancer=int(np.floor(6*rd.random()))+1`.

```python
import numpy.random as rd

def experience(n):
    x=0 ; y=0
    for i in range(n):
        lancer=int(np.floor(6*rd.random()))+1
        if lancer == 5:
            x+=1
        elif lancer == 6 :
            y+=1
    return(x,y)
```

4. (a) Coefficient de corrélation linéaire du couple (X, Y) :
   — Comme X et Y suivent $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{6}\right)$, $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = n \times \dfrac{1}{6}$ et $\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Y) = n \times \dfrac{1}{6} \times \dfrac{5}{6} = \dfrac{5}{36}\, n$
   — Comme $X + Y$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{3}\right)$, $\mathbb{V}(X+Y) = n \times \dfrac{2}{9} = \dfrac{2}{9}\, n$.
   $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\operatorname{Cov}(X,Y) \implies \operatorname{Cov}(X,Y) = \dfrac{1}{2}\,[\mathbb{V}(X+Y) - \mathbb{V}(X) - \mathbb{V}(Y)]$.
   Donc : $\operatorname{Cov}(X,Y)) = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{2}{9}\, n - 2 \times \dfrac{5}{36}\, n\right] = -\dfrac{1}{36}\, n$.
   — D'où : le coefficient de corrélation linéaire du couple (X, Y) est $\rho_{X,Y} = \dfrac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sigma_X . \sigma_Y} = \dfrac{-\frac{1}{36}\, n}{\left(\sqrt{\frac{5}{36}\, n}\right)^2} = -\dfrac{1}{5}$.

   Le signe négatif du coefficient de corrélation linéaire indique que globalement X et Y varient en sens contraires ; c'est logique : plus il est sorti de 5, moins il y a de places pour des 6…
   (b) Si les variables X et Y étaient indépendantes le coefficient de corrélation serait nul. Ce n'est pas le cas. Autre façon de voir que X et Y ne sont pas indépendantes : si X est égal à n, Y doit être nul...
   (c) Si Y était une fonction affine de X, on aurait $|\rho_{X,Y}| = 1$, ce qui n'est pas le cas.
5. Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev, $\mathbb{P}(|f_n - p| < \varepsilon) \geqslant 1 - \dfrac{pq}{n\varepsilon^2}$; on a, puisque $p = \dfrac{1}{3}$:
   $\mathbb{P}\left(\left|f_n - \dfrac{1}{3}\right| < 0,01\right) \geqslant 1 - \dfrac{2.10^4}{9n}$.
   Pour que cette probabilité soit supérieure ou égale à $0,9$, il suffit que $1 - \dfrac{2.10^4}{9n} \geqslant 0,9$, c.à d. : $n \geqslant 22223$.

Exercice sans préparation T 3

Soit $E = \{M \ \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / M^2 - 5M + 4I = 0\}$.

1. Montrer que E a au moins 4 éléments.
2. Déterminer les matrices de E qui sont diagonalisables.
3. Montrer que E est infini.

Solution :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$
2. Les valeurs propres de d'une matrice de E sont dans $\{1; 4\}$ (car le polynôme $X^2 - 5X + 4 = (X-1)(X-4)$ est annulateur). D'autre part toute matrice de la forme PDP^{-1}, avec des 1 ou des 4 sur la diagonale de D, et P inversible est trivialement dans E.
   Donc les diagonalisables de E sont de la forme PDP^{-1} avec D diagonale avec des coefficients diagonnaux appartenant à $\{1; 4\}$ et P inversible.
3. Pour tout t réel, E contient les matrices $M_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. En effet M_t est diagonalisable et s'écrit $P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1}$ et vérifie donc trivialement $M^2 - 5M + 4I = 0$. On peut aussi faire le calcul direct évident.